

連星系の惑星運動 —楕円制限三体問題としての定式化—

浦田 健二 (大東文化大学経済学部)

Planetary Motions in Binary Systems —Formulation as the Elliptic Restricted Three Body Problem—

Kenji URATA

要 旨

連星系の惑星についての観測的事実を楕円制限三体問題の見地から分析・検討し、連星系の惑星運動を記述する非常に単純で普遍的な力学系を構築する。楕円制限三体問題の「一時的に」安定な周期解やカオス解を理論的・数値的に探究することが、連星系の惑星の運動を理解する鍵になることを論ずる。

1. 連星系の惑星運動と楕円制限三体問題

初めての太陽系外惑星（系外惑星）が1992年に発見されて以来¹⁾、現在までに数千個もの惑星が太陽以外の恒星を周回していることがわかり、系外惑星の存在は普遍的なものとなった²⁾。それと同時に、太陽系内惑星との大きな差異も明らかになってきた。中心星のすぐそばを数日の短周期で回る大型のガス惑星（木星型惑星）、いわゆる「ホットジュピター」が、多くはないがある割合で存在し、また系外惑星の離心率は一般的に太陽系内惑星よりも大きく、0.1以上の離心率を持つ惑星（いわゆる「エクセントリックプラネット」）は数多く存在する^{3), 4)}。太陽系内惑星を基に組み立てられた、従来からある惑星形成理論を根本的に見直す必要に迫られている⁵⁾。この惑星形成理論の立場からみても、さらに天体力学的な意味からも、系外惑星に関して最も衝撃的なことは、連星系に惑星が発見されたことである^{6), 7)}。

これまでに発見された連星系の惑星は、次の (a), (b) の2つのタイプのどちらかである (図1参照)。

(a) P-type

連星（主星Aと伴星B）の重心を焦点（中心）とし、連星からある程度離れたところを周回する惑星（周連星惑星P）が存在する。

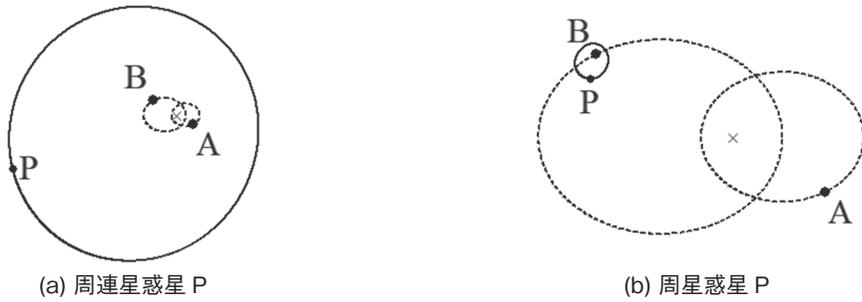


図 1. (a) 周連星惑星 P

(b) 周星惑星 P

(b) S-type

主星 A が伴星 B のどちらか一方の恒星を焦点（中心）とし、その恒星の近くを周回する惑星あるいは惑星系（周星惑星 P）が存在する。

発見数は S-type の方が圧倒的に多く（惑星数で 1000 個程度）、P-type は少ない（数十個程度）。P-type の惑星を複数持つ連星系はごく少数しか発見されていないのに対し⁸⁾、S-type の惑星を複数もつ連星系は多数発見されている。S-type の惑星には、「ホットジュピター」や「エクセントリックプラネット」となっているものが多数あり、また P-type にも「エクセントリックプラネット」となっている惑星が存在することがわかっている。

天体力学の立場からみれば、一般に 2 つの恒星からなる連星系は、重心の周りを離心率が大きい楕円軌道を描いて運動（ケプラー運動）し、その周期は主星と伴星の平均距離が小さいほど短く、大きいものほど長くなる。したがって P-type の場合、中心付近にある 2 つの恒星は遠くにある惑星に比べて非常に早くケプラー運動することになり、結果的に惑星が受ける重力場は急速に変動し、惑星はふらふらと揺り動かされることになる。S-type の場合にも、仮に主星の周りを惑星が周回しているとすると、伴星が近くにいれば伴星からの重力によって惑星は大きな摂動を受けることになり、やはりふらふらと揺り動かされることになる。安定な運動をする惑星が存在するためには、P-type であれば惑星が中心の連星から十分に遠方にあること、S-type であれば伴星が主星 - 惑星系から十分に遠方にあることが必要になる。しかし、そのような状況設定だと極端に言えば単独惑星（自由浮遊惑星）や単独星の惑星を実質的に扱っていることになり、連星系としての意味をなさない。P-type、S-type の惑星の存在は、近似的なケプラー運動が 3 つの天体（主星、伴星、惑星）の重力場において安定であることを意味する。力学的にそのような解が可能なのかどうかを数値的にシミュレーションし、惑星はある一定の有限時間ではあるが P-type や S-type のような安定な軌道を持つことが示されている⁹⁾。

連星系の惑星の運動は、楕円制限三体問題そのものである。連星をなす主星と伴星は、ともに質量が太陽規模の天体（恒星）であり、重心の周りを楕円運動する。楕円運動の離心率は小さいものから大きなものまでであるが、円（離心率 0）に近いものは一般的にはほとんど存在しない。連星系に属する惑星の質量は、たとえ木星型の巨大惑星であっても、恒星である主星と伴星にくらべれば圧倒的に小さい。以上のことから、惑星の主星や伴星に対する重力の影響は無視し、主星と伴星の

間の互いの重力および主星と伴星が惑星に及ぼす重力のみを考慮すればよいことがわかる。主星と伴星の間には互いの重力のみはたつき、惑星の影響は一切受けないので、主星と伴星は重心の周りに楕円運動することになる。惑星は、すでに運動が決定されている主星と伴星から万有引力を受けて運動する。これはまさに楕円制限三体問題である。

楕円制限三体問題は、積分定数を含む形で解析的に解くことは不可能だが、周期的な特殊解が存在することが知られている。オイラーの直線解（ラグランジェポイントの L1, L2, L3）とラグランジェの正三角形解（ラグランジェポイントの L4, L5）は共通重心の周りを 3 天体がケプラー運動する解で、直線解は不安定、正三角形解は中立安定になっている。中立安定な正三角形解は現実存在し、たとえば太陽系における太陽と木星とトロヤ群小惑星は正三角形解の具体例となっている。連星系の惑星にも正三角形解に相当する運動があってもおかしくないのだが、この解は主星の伴星に対する質量比が 24.96 以下になると不安定になるため、現実的には存在しない。P-type と S-type の惑星の運動は近似的なケプラー運動であるとみなしており、当然ながら主星と伴星の運動も近似的なケプラー運動とすると、P-type と S-type の惑星の発見は、楕円制限三体問題に新しい安定な周期的特殊解が存在することを意味する。

最近、三体問題の数値的研究から一連の新しい周期解が発見された。「8 の字解」と呼ばれる周期解はケプラー運動とは全く異なる挙動を示す。3 つの天体が互いに相手を追いかけてまわすように運動する周期解である。最初は数値的に発見されたが、後に変分法によって確かに存在することが数学的に証明されている¹⁰⁾。また、1 つの閉曲線上を互いに追跡しあうように運動する「舞踏解」と呼ばれる一連の周期解も発見された¹¹⁾。これらの解は安定であるかどうかはわかっていないが、数値的に再現されていることから現実に存在しうる解であると思われる。角運動量（面積速度）が 0 の解なので実際に存在する可能性は低いが、これら数値的に発見された新しい周期解に相当する連星系の惑星の運動が観測によって発見されるかもしれない。また、もっと広く考えると、三体問題の解の挙動はカオス的になることがポアンカレ以来知られているわけだから、実際の連星系の惑星運動にも、もっと不規則な挙動をするものがあるはずである^{12), 13), 14)}。しかし原始惑星系円盤という星間ガスの中から惑星が誕生したことを考慮すると、ガスとの摩擦によって不規則な運動は抑えられてしまい、そのような惑星は存在しえないのかもしれない。

連星系における惑星運動として、どのような種類の運動が可能なのかをできる限り広い条件設定で研究するため、楕円制限三体問題を取り上げて無次元定式化を行う。惑星が主星や伴星に衝突する衝突解や、惑星が跳ね飛ばされて連星系から放り出されてしまう解ではなく、連星系に惑星がある程度長期間にわたって滞在するような周期解やカオス解を見出すことで、P-type や S-type 以外の惑星運動が広くあり得ることを示し、また楕円制限三体問題の解の全体像をできるだけ明らかにすることができるよう、問題の定式化を行う。

2. 楕円制限三体問題の無次元定式化

2-1. 制限三体問題の無次元定式化

連星系の主星, 伴星, 惑星の質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3 , 慣性系における位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, とおく. 惑星の質量は, たとえ木星型であったとしても主星と伴星にくらべれば圧倒的に小さいので, 惑星の重力によって主星と伴星の運動が影響をうけることはない. 主星と伴星にはたらく惑星の重力は無視できる. よって主星, 伴星, 惑星の運動方程式は,

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$m_3 \frac{d^2 \mathbf{q}_3}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_3}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|^3} (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) - \frac{G m_2 m_3}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2|^3} (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

ここで, G は万有引力定数, t は時刻を表している, 主星を中心とした相対ベクトル

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1$$

を用いると, ①式と②式より

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}}{dt^2} = -G (m_1 + m_2) \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^3} \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

③式は

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{G m_1}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} - \frac{G m_2}{|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|^3} (\mathbf{q} - \mathbf{Q}) - \frac{G m_2}{|\mathbf{Q}|^3} \mathbf{Q} \quad \dots \quad \textcircled{5}$$

④式, ⑤式が基本方程式となるが, ④式は単独で解くことができ, ケプラー運動となる. もちろん, これは連星系の主星と伴星が惑星の影響を受けずに運動するからである.

さらに④式, ⑤式を無次元化しよう. 長さ, 時間の基準として④式のケプラー運動の軌道長半径, 公転周期にとりたいところであるが, ひとまず一般的に a [m], $\frac{T}{2\pi}$ [s] とおき,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

となるように時間の基準値を選ぶと, ④, ⑤式は

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^3} \quad \dots \quad \textcircled{6}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3} - \mu \left\{ \frac{\mathbf{q} - \mathbf{Q}}{|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|^3} + \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^3} \right\} \quad \dots \quad \textcircled{7}$$

ここで質量率 μ を

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

とおいた。主星の質量 m_1 のほうが伴星の質量 m_2 よりも大きいとしておく、 $0 < \mu \leq 0.5$ となる。
⑥、⑦式が制限三体問題の無次元定式化である。

2-2. 連星系の楕円運動について

これ以降、平面上での運動を考えるものとする。平面上に極座標を導入し、主星からみた伴星の位置ベクトル $\mathbf{Q} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ 、主星からみた惑星の位置ベクトル $\mathbf{q} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおく (図 2 参照)。

⑥式は主星からみた伴星の運動を決めているが、今考えたいのは連星系をなしている場合であるから、楕円運動解を選択する。時刻 $t = 0$ で $\varphi = 0$ 、また r が最小値になるようにとれば、伴星の楕円運動は面積速度 s と離心率 e ($0 \leq e < 1$) によって完全に決定される。

$$\left\{ \frac{8s^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} \right\} \frac{d\varphi}{dt} = 1 \quad \dots \quad \textcircled{8}$$

$$R = \frac{4s^2}{1 + e \cos \varphi} \quad \dots \quad \textcircled{9}$$

このとき、連星系の力学的エネルギー $E = \frac{e^2 - 1}{8s^2}$ となる。⑧式は時間 t と φ の関係を決める。 φ がきまれば⑨より R がきまり、時間 t における伴星の位置が決定される。

時間 $t = 0$ のとき (つまり $\varphi = 0$ のとき)、主星から伴星までの距離は最小で $\frac{4s^2}{1+e}$ となるが、離心率 e を固定して面積速度 s の大きさを変えると、楕円の扁平度はそのまま楕円の大きさ自体を変化させたことになる。伴星が楕円運動することで周囲につくる重力場が変化し、その変化が惑星に与える影響をみたいときには、楕円の大きさ自体は重要ではない。そこでこれ以降、伴星の主星からの最小距離 $\frac{4s^2}{1+e}$ が 1 となるように面積速度 s をとることとする (図 3 参照)。

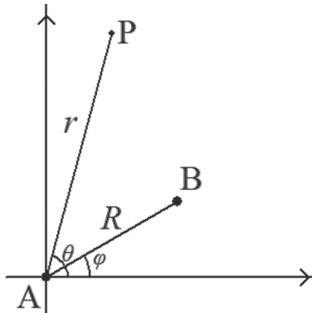


図 2. 極座標 (主星 A、伴星 B、惑星 P)

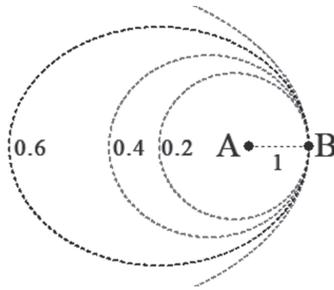


図3. 主星 A から見た伴星 B の軌道 (数字は離心率を表す)

このとき、伴星の楕円運動は

$$R = \frac{1+e}{1+e\cos\varphi} \quad \dots \quad (10)$$

であらわされ、公転周期 $T_0 = \frac{2\pi}{(\sqrt{1-e})^3}$ 、力学的エネルギー $E = \frac{e-1}{2}$ 、面積速度 $s = \frac{1}{2}\sqrt{1+e}$ となる。主星と伴星の間の距離の最小値は 1、最大値は $\frac{1+e}{1-e}$ で、伴星の楕円運動の軌道長半径は $\frac{1}{1-e}$ 、軌道短半径は $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ となっている。

時間 t と φ の関係を明示的に求めよう。⑩式は $0 \leq \varphi \leq \pi$ 、すなわち $0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ で初等的に積分することができる。

$$F(\varphi) \equiv \frac{2}{(\sqrt{1-e})^3} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\varphi}{2} \right) - e \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\sin \varphi}{1+e \cos \varphi}$$

を定義すると、

$$F(\varphi) = t$$

という結果になる。 $F(\varphi)$ は $0 \leq \varphi \leq \pi$ で正の値をとる単調増加関数、 $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ で負の値をとる単調増加関数であり、 $\varphi = \pi$ で不連続になっている (図4参照)。

任意の時間 t における φ の値は以下のように決定できる。

$$t' = t - \left[\frac{t}{T_0} \right] T_0$$

に対し、

$$\begin{aligned} 0 \leq t' \leq \frac{T_0}{2} \text{ のとき} & \quad \varphi = F^{-1}(t') \\ \frac{T_0}{2} \leq t' \leq T_0 \text{ のとき} & \quad \varphi = F^{-1}(t' - T_0) \end{aligned}$$

とすればよい。ここで [*] はガウス記号を表している。 φ を時間 t' の関数として描いておこう (図5参照)。

$\varphi = \pi$ 付近では $F(\varphi)$ の不連続性のために $F(\varphi)$ の逆関数がうまく計算できない。⑩式の $\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}$ を $\varphi = \pi$ で級数展開してから積分することで次の2次のオーダーの近似式が得られるので、それを用いればよい。

$$\varphi = \frac{(1-e)^2}{(\sqrt{1+e})^3} \left(t' - \frac{T_0}{2} \right) + \pi$$

以上で主星から見た伴星の運動は明示的に決定された。

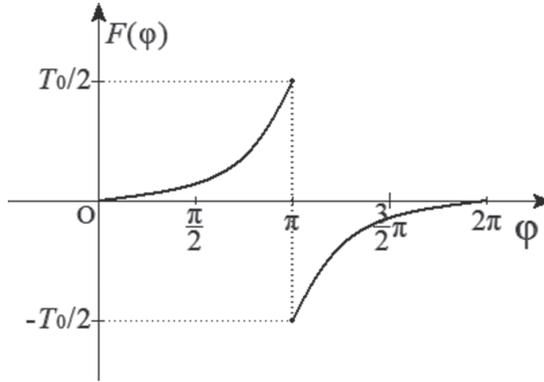


図 4. $F(\varphi)$ の変化 (T_0 は連星の公転周期, $e=0.6$)

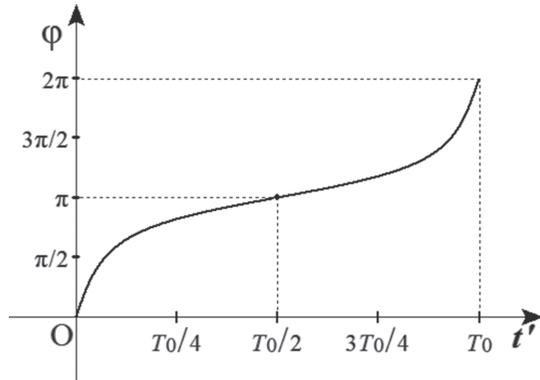


図 5. 時間 t' と φ の関係 (T_0 は連星の公転周期, $e=0.6$)

2-3. 惑星の運動方程式

主星からみた惑星の位置ベクトル \mathbf{q} は $\mathbf{q} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ であった. ⑦式と $u = \frac{dr}{dt}$, $v = r \frac{d\theta}{dt}$ とおくことで, r, θ, u, v についての力学系が得られる.

$$\frac{dr}{dt} = u$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{v^2}{r} - \frac{(1-\mu)}{r^2} - \mu \frac{r}{(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)})^3}$$

$$- \mu \cos(\theta - \varphi) \left\{ \frac{1}{R^2} - \frac{R}{(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)})^3} \right\}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \mu \sin(\theta - \varphi) \left\{ \frac{1}{R^2} - \frac{R}{(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)})^3} \right\}$$

時間 t が与えられれば、伴星の位置 R , φ は 2-2 により決定されているから、上記の 4 つの方程式は非常に簡単な力学系になっていることがわかる。

3. 議論と今後の課題

連星系の惑星は、2 つの大きな質量をもつ恒星がケプラー運動して作り出す重力場の中を運動するため、その運動パターンは一般的に非常に複雑になることが予想される。複雑になるだけでなく、時間が十分に立つと主星や伴星に衝突することや、連星系からはじき出されることが起こる¹⁵⁾。したがって、本来、永年安定な軌道は存在しないのかもしれない。しかし、系外惑星が連星系で発見されたことは、少なくともある一定時間は安定な惑星軌道が存在することを意味している。

P-type の周連星惑星は、中央にある 2 つの恒星を 1 つとみなせば、単独星の周りのケプラー運動であるとみなせる。惑星が連星に近づくほど、変動する重力場の影響をうけ、惑星は不安定になることが予想される。観測的にも連星に近いところを周回する惑星は今のところ発見されていないし、楕円制限三体問題として数値実験をすることによっても⁹⁾、惑星が連星から離れたところにはいないと軌道が安定しないことが示されている。S-type の周星惑星については、周回する主星（あるいは伴星）の十分近いところに惑星がいないと安定しないことが数値実験の上でも示されているし、観測的にも中心星から離れたところを回る惑星は発見されていない。現在観測されている周連星惑星や周星惑星は、永年的には安定ではないのかもしれない。連星系の惑星はある一定の期間だけ周回運動しているだけで（そのため観測もできる）、永久にそのまま周回運動するわけではないのかもしれないし、そもそも周期的な運動ですらないかもしれない。観測上は区別できないし、数値実験でも永遠に時間積分するわけにはいかないからである。

楕円制限三体問題は連星系の惑星運動そのものであるから、連星系の系外惑星の発見を受けて、もっと詳細に解の種類や軌道の安定性を調べる時期に来ているといえる。恒星にも終わりはあるのであるから、永年的に安定な軌道でなくとも、一時的に安定な軌道を探すことには意義がある。ケプラー運動もどきの周回運動、2 つの恒星をめぐる準周期的な運動、2 つの恒星を周回するカオスの挙動を示す運動などが、一時的にせよ安定な解として存在しうるかを探求する必要がある。

惑星が誕生する原始惑星系円盤は、近年直接観測できるようになり、単独星の周りだけでなく、連星系の周りにも多数発見されている。連星系の原始惑星系円盤は、連星の公転周期が短いとき（主星と伴星の距離が小さいとき）には、連星の公転面と原始惑星系円盤の面は一致しているが、公転周期が長いときには大きくずれていることがわかってきた¹⁶⁾。連星の公転面と原始惑星系円盤の面が大きくずれていると、誕生した惑星の公転面も連星の公転面と大きくずれていることになる。この場合にはいわゆる「古在効果」がはたらき、惑星の運動は離心率が大きく変動するカオスの挙動を示すことがわかってきている¹⁷⁾。この場合には本稿の 2-3 のように平面での楕円制限三体問題としては扱うことができない。また、原始惑星系円盤から惑星が誕生するなら複数の惑星が存在するほうが一般的であり、恒星が 2 つ、惑星が 2 つあるいは複数個という状況を取り扱えるようなモデル化

をしなければならない。木星型の巨大惑星が2つあるときには、惑星同志の重力相互作用によって軌道交差を含むような大きな軌道変更が起きることがわかっているが、これは制限4体問題としてどのような扱いをすればよいのだろうか？ さらに3重連星系、4重連星系にも系外惑星が発見されていることを考えると^{18), 19)}、少数多体問題あるいは制限少数多体問題を積極的に研究する段階に来ているといえる。

参考文献

- 1) Wolszczan, A., & Frail, D., 1992, *Nature* 355, 145
- 2) NASA EXOPLANET ARCHIVE, <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/> (2020.8.31)
- 3) Goldreich, P., & Sari, R., 2003, *The Astrophysical Journal* 585 (2), 1024
- 4) Sari, R., & Goldreich, P., 2004, *The Astrophysical Journal* 606 (1), L77
- 5) 井田茂, 2015, *日本物理学会誌*, Vol.70, No.9, 672
- 6) Fischer, D. A., et al., 2008, *The Astrophysical Journal* 675 (1), 790.
- 7) Thorsett, S. E., et al., 2003, *The Astrophysical Journal* 412 (1), L33
- 8) Orosz, J. A., et al., 2012, *Science* 337 (6101), 1511
- 9) Holman, J. M., & Wiegert, A. P., 1999, *The Astronomical Journal*, 117, 621
- 10) Chenciner, A., & Montgomery, R., 2000, *Ann. Math.* 152, 881
- 11) Suvakov, M., & Shibayama, M., 2016, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 124, 155
- 12) Holman, M., et al., 1997, *Nature*, 386, 254
- 13) Satyal, S., et al., 2014, *MNRAS*, 443, 1310
- 14) Kostovl, V. B., et al., 2014, *The Astrophysical Journal* 784 (1), 14
- 15) David P. F., et al. 2018, *The Astrophysical Journal* 858 (2), 86
- 16) Czekala, I., et al., 2019, *The Astrophysical Journal*, 883 (1), 22
- 17) Fabrycky, D., & Tremaine, S., 2007, *The Astrophysical Journal*, 669, 1298
- 18) Winters, J. G., et al., 2019, *The Astronomical Journal* 158 (4), 152.
- 19) Lewis C. R., et al., 2015, *The Astronomical Journal* 149 (4), 118