

# 一般均衡体系の数学的解法

石橋 春男 (大東文化大学名誉教授)

## Mathematical Solution of General Equilibrium System

Haruo ISHIBASHI

### 第 11 章 多数商品の交換問題 (一般均衡理論) <sup>1</sup>

104. いまや 2 商品 (A) と (B) の交換についての研究から、多数商品 (A)、(B)、(C)、(D)・・・の交換の研究に移ることにする。これに関連して、やるべきことは交換者がたった一商品の所有者である場合に立ち返り、それから適切なやり方で、交換方程式を一般化することである。

これからは、 $D_{a,b}$  を 2 (B) と交換する (A) の有効需要、 $D_{b,a}$  を (A) と交換する (B) の有効需要  $p_{a,b}$  を (B) で表わした (A) の価格、そして、 $p_{b,a}$  を (A) で表わした (B) の価格としよう。このことから、4 個の未知数  $D_{a,b}$ 、 $D_{b,a}$ 、 $p_{a,b}$ 、 $p_{b,a}$  に対して、2 つの有効需要方程式

$$D_{a,b} = F_{a,b}(p_{a,b})$$

$$D_{b,a} = F_{b,a}(p_{b,a})$$

と、有効需要と有効供給との均衡を表わす 2 つの方程式

$$D_{b,a} = D_{a,b}p_{a,b}$$

$$D_{a,b} = D_{b,a}p_{b,a}$$

が成り立つ。

すでに分かっていることだが、これらの方程式のうちの最初の 2 つの方程式は 2 本の曲線によって幾何学的に描くことができる。後者の 2 つの方程式から 2 曲線を描いたとき、それらの曲線の内側に描ける四角形は、その底辺が高さと反比例し、面積の比に正比例する矩形となる [57 節]。

105. ここで 2 商品 (A) と (B) の場合から、3 商品 (A)、(B)、(C) の場合に移ることにする。それゆえに、次のようなことを想定してみよう。商品 (A) を持って市場に表われる人が何人かいる。彼らの中には、(A) の一部を手放して、(B) を手に入れるものがあるし、また、別の方から市場に (B) を持って現れる者がいる。彼らは (B) の一部を手放して、(A) を手に入れ、また (C) を手に入れる者がいる。さらに、(C) を持って市場に表われる人々は、(C) を手放して、(A) や (B) を手に入れる者達である。

以上の前提の下で、これらの人々のうちの一人、例えば(B)の保有者を取り上げてみよう。また、すでに50節で大枠を説明した推論をここで展開していくことにしよう。ここで、再び、この個人の取引行動を厳密に決めることにする。

実際に、(B)の量 $q_b$ を所有する人々は、(B)の量 $O_{b,a}$ を、方程式

$$d_{a,b}v_a = o_{b,a}v_b$$

に従って、(A)の量 $d_{a,b}$ と交換する。それだけでなく、(B)の量 $O_{b,c}$ を方程式

$$d_{c,b}v_c = o_{b,c}v_b$$

に従って(C)の量 $d_{c,b}$ と交換する。交換が終わると、(A)の量 $d_{a,b}$ 、(C)の量 $d_{c,b}$ 、さらに

$$y = q_b - o_{b,a} - o_{b,c} = q_b - d_{a,b}v_a/v_b - d_{c,b}v_c/v_b$$

に等しい(B)の量 $y$ をもって市場から立ち去ることになる。一般的に言えば、(B)の量 $q_b$ と $v_a/v_b$ あるいは $p_{a,b}$ 、 $d_{a,b}$ と $v_c/v_b$ あるいは $p_{c,b}$ 、 $d_{c,b}$ と $y$ は、方程式

$$q_b = y + d_{a,b}p_{a,b} + d_{c,b}p_{c,b}$$

の関係が成立する。市場に着くまでは、取引者は $v_a/v_b$ や $p_{a,b}$ がどうなるか分からない。また、 $v_c/v_b$ や $p_{c,b}$ がどうなるかも分からない。しかし、取引者が市場に顔を出すと、確実にその値がわかるのである。

取引者が $p_{a,b}$ と $p_{c,b}$ の値がどうなっているかを一旦知ると、彼は $d_{a,b}$ と $d_{c,b}$ の数量を決めるであろう。従って、上述の方程式によつての $y$ 値も決定する。確かに言えることは、 $p_{c,b}$ が $p_{a,b}$ と同様に分かっているならば、 $d_{a,b}$ を決定することはできないということである。また、 $p_{a,b}$ が $p_{c,b}$ と同様に分かっているならば、 $d_{c,b}$ の決定はできない。同時に、 $p_{a,b}$ と $p_{c,b}$ が分かっているとき、この情報こそ $d_{a,b}$ と $d_{c,b}$ の決定を可能にすることを知っておくべきである。

106. さて、 $d_{a,b}$ と $d_{c,b}$ の直接的な関係、すなわち、(B)と交換するときの(A)と(C)の有効需要とこれらの商品の価格である $p_{a,b}$ と $p_{c,b}$ の関係を、再び数学的に示すことにしよう。この関係は検証している個人の取引行動であるが、厳密に言えば、

$$d_{a,b} = f_{a,b}(p_{a,b}, p_{c,b})$$

と

$$d_{c,b} = f_{c,b}(p_{a,b}, p_{c,b})$$

の2つの方程式によって表される。

同様にして、商品(B)のすべての所有者の方程式も得られる。そこから、これらの個人の需要方程式を合計することによって、2つの総需要方程式

$$D_{a,b} = F_{a,b}(p_{a,b}, p_{c,b})$$

$$D_{c,b} = F_{c,b}(p_{a,b}, p_{c,b})$$

が得られる。これらの方程式は、(B)のすべての保有者を集計した取引行動を表わすことになる。

同様にして、商品(C)のすべての所有者の総需要方程式が得られる。

$$D_{a,c} = F_{a,c}(p_{a,c}, p_{c,b})$$

$$D_{b,c} = F_{b,c}(p_{b,a}, p_{b,c})$$

これらの方程式は、(C) のすべての保有者を集計した取引行動を表わしている。

最後に同じ手続きを使うことによって、2つの総需要方程式が得られる。

$$D_{b,a} = F_{b,a}(p_{b,a}, p_{c,a})$$

$$D_{c,a} = F_{c,a}(p_{b,a}, p_{c,a})$$

これらの方程式は、すべての (A) の保有者の取引行動を表わすものである。

107. その他に (B) の (A) に対する交換方程式と (B) の (C) に対する交換方程式がそれぞれある。

$$D_{b,a} = D_{a,b} p_{a,b}$$

$$D_{b,c} = D_{c,b} p_{c,b}$$

また、(C) の (A) に対する交換方程式と (C) の (B) に対する交換方程式がある。

$$D_{c,a} = D_{a,c} p_{a,c}$$

$$D_{c,b} = D_{b,c} p_{b,c}$$

そして、最後に (A) の (B) に対する交換方程式と (A) の (C) に対する交換方程式がある。

$$D_{a,b} = D_{b,a} p_{b,a}$$

$$D_{a,c} = D_{c,a} p_{c,a}$$

かくして、12個の未知数に対して12個の方程式が成立する。それらの未知数は、他の2商品で表わされた3つの商品の6個の価格と相互に交換される6つの商品量6個である。

108. さて、 $m$ 個の商品 (A)、(B)、(C)、(D)・・・が取引される市場を仮定しよう。この場合、2商品や3商品の取引に、利用した推論を用いることによって、すぐに (A) と交換される (B)、(C)、(D)・・・の  $(m-1)$  個の有効需要方程式を、

$$D_{b,a} = F_{b,a}(p_{b,a}, p_{c,a}, p_{d,a} \dots)$$

$$D_{c,a} = F_{c,a}(p_{b,a}, p_{c,a}, p_{d,a} \dots)$$

$$D_{d,a} = F_{d,a}(p_{b,a}, p_{c,a}, p_{d,a} \dots)$$

.....

と書くことができる。それから、(B) と交換される (A)、(C)、(D)・・・の  $(m-1)$  個の有効需要方程式、

$$D_{a,b} = F_{a,b}(p_{a,b}, p_{c,b}, p_{d,b} \dots)$$

$$D_{c,b} = F_{c,b}(p_{a,b}, p_{c,b}, p_{d,b} \dots)$$

$$D_{d,b} = F_{d,b}(p_{a,b}, p_{c,b}, p_{d,b} \dots)$$

.....

それから (C) と交換される (A)、(B)、(D)・・・の  $(m-1)$  個の有効需要方程式、

$$D_{a,c} = F_{a,c}(p_{a,c}, p_{b,c}, p_{d,c} \dots)$$

$$D_{b,c} = F_{b,c}(pb, a, pb, c, pd, c \dots)$$

$$D_{d,c} = F_{d,c}(pb, a, pb, c, pd, c \dots)$$

.....

さらに、(D) と交換される (A)、(B)、(C)・・・の (m - 1) 個の有効需要方程式、

$$D_{a,d} = F_{a,d}(p_{a,c}, p_{b,c}, p_{d,c} \dots)$$

$$D_{b,d} = F_{b,d}(p_{b,a}, p_{b,c}, p_{d,c} \dots)$$

$$D_{c,d} = F_{c,d}(p_{b,a}, p_{b,c}, p_{d,c} \dots)$$

.....

などが得られる。そうすると、有効需要方程式の数は、全部で m (m - 1) 個でとなる。

109. これ以上の説明を加えることが必要でないかもしれないが、以下のような方程式を書くことができる。まず、(A) と (B)、(C)、(D)・・・との (m - 1) 個の交換方程式、

$$D_{a,b} = D_{b,a} p_{b,a}$$

$$D_{a,c} = D_{c,a} p_{c,a}$$

$$D_{a,d} = D_{d,a} p_{d,a}$$

.....

(B) と (A)、(C)、(D)・・・との (m - 1) 個の交換方程式、

$$D_{b,a} = D_{a,b} p_{a,b}$$

$$D_{b,c} = D_{c,b} p_{c,b}$$

$$D_{b,d} = D_{d,b} p_{d,b}$$

.....

(C) と (A)、(B)、(D)・・・との (m - 1) 個の交換方程式、

$$D_{c,a} = D_{a,c} p_{a,c}$$

$$D_{c,b} = D_{b,c} p_{b,c}$$

$$D_{c,d} = D_{d,c} p_{d,c}$$

.....

(D) と (A)、(B)、(C)・・・との (m - 1) 個の交換方程式、

$$D_{d,a} = D_{a,d} p_{a,d}$$

$$D_{d,b} = D_{b,d} p_{b,d}$$

$$D_{d,c} = D_{c,d} p_{c,d}$$

.....

などがそれぞれ成り立つ。よって、交換方程式の数は全部で m (m - 1) 個である。

m (m - 1) 個の有効需要方程式と m (m - 1) 個の交換方程式を合計すると、2m (m - 1) 個の方程式が存在することになる。これらの方程式には 2m (m - 1) 個の未知数がある。それらは m (m - 1) 個の価格と、m (m - 1) 個の総交換量である。それは、m 個の商品が一度に 2 つず

つ交換されるからである。

110. 2商品の交換や3商品の交換の場合に、幾何学的にも代数的にも解法できる。なぜならば、どちらのケースにおいても需要関数を幾何学的に表わすことができるからである。2商品の交換の場合において、需要関数は1変数の関数であり、2つの曲線で表わすことができる。3商品の交換の場合においては、需要関数は2変数の関数である。そして、6面の空間で表わされる。2商品の場合には曲線内に四角形を描くことによって均衡問題の幾何学的解法ができる。一方、3商品の場合には、6つの局面と平面の交わりによって描かれる曲線内に四角形を測ることによって幾何学的解法に近づくことができる。

しかしながら、一般的な取引では、需要関数は  $(m - 1)$  個の変数の関係である。このとき、 $(m - 1)$  個の変数を持つ関数では、変数が多すぎて空間では表わすことができない。それゆえに、一般化された問題は、定式化はできるし、代数的にも解くことができるが、幾何学的には解くことができない。

本書を通じて心に留めておくことは、具体的状況の中で現実の問題であるかのように問題を提示し、その問題を解くことではなく、その問題が経験的に解かれる市場で実際に生じる問題の本質を科学的に定式化することである。われわれの見方からすれば、数学的解法は幾何学的解法と同様にすぐれた解法であるばかりでなく、数学的表示形式を取り入れると、すぐれた一般的かつ科学的形式となる。

111. いまや、多数商品の交換問題が解けたように思える。しかし、実際には半分しか解けていない。上述の条件の下で、一度に成立した2つの価格に関する限り、市場均衡は成立するであろう。しかし、そうした均衡は不完全均衡なのである。他の商品で表わしたいいずれか2つの商品のうち1つの価格が、第3の商品で表わしたこれら2つの商品の価格比に等しくないならば完全均衡でもないし、また、一般均衡でもない。このことは証明を必要とすることである。その証明のために、すべての商品の中から3つの商品 (A)、(B)、(C) を選ぶことから始めよう。そして、価格  $p_{c,b}$  が価格  $p_{c,a}$  と  $p_{b,a}$  の比より大きいか、または小さいと仮定しよう。このとき、何が起こるか検討してみよう。

ここで、すべての商品 (A)、(B)、(C)、(D)・・・が交換される市場は2商品ずつ交換される市場に分割されると仮定してみよう。このとき、分割市場は、 $\frac{m(m-1)}{2}$  個になる。それぞれの市場には、交換される2商品の名称がつけられている。

その上、これまでに展開されてきた方程式体系に従って数学的に決定される交換比率や価格が存在する。例えば、互いに逆数である価格  $p_{a,b}$  と  $p_{b,a}$  での (A) と (B) の交換と (B) と (A) の交換、互いに逆数である価格  $p_{a,c}$  と  $p_{c,a}$  で行われる (A) と (C) の交換と (C) と (A) の交換、互いに逆数である価格  $p_{b,c}$  と  $p_{c,b}$  で行われる (B) と (C) の交換と (C) と (B) の交換がある。

これらのことを前提にして、もし (B) と (C) を手に入れたいと思っている (A) の保有者が、

上の第一と第二の市場で、(A) を (B) や (C) を交換するだけならば、またもし、(A) や (C) を望んでいる (B) の保有者が、第一と第三の市場で、(B) を (A) や (C) と交換するだけならば、さらに (A) や (B) を欲している (C) の保有者が第二や第三の市場で (C) を (A) や (B) と交換するだけならば、そのときには、均衡状態は変わらないであろう。

しかしながら、(A)、(B)、(C) の各保有者のいずれもこうした取引をしないことを明らかにすることはむずかしいことではない。各保有者は自分にとってより有利となる別の方法を探し回るのである。

112. 以前にも行ったことだが、

$$p_{c,b} = \alpha \cdot p_{c,a} / p_{b,a}$$

で、 $\alpha > 1$  と仮定する。

あるいは、

$$(p_{c,b} p_{b,a} p_{c,a}) / \alpha = 1$$

であると仮定する。

上の式から、(B) で表わした (C) の本当の価格は  $p_{c,b}$  ではなく、 $p_{c,b} / \alpha$  であることがこの方程式から説明できる。

その理由は、(B) の  $p_{c,b} / \alpha$  単位に対して、(B) で表わした (A) の価格  $p_{a,b} = 1/p_{b,a}$  では、(A, B) 市場で (A) の  $\frac{p_{c,b} p_{b,a}}{\alpha}$  をまず手に入れることが可能だからである。

それから、(A) で表わした (C) の価格  $p_{c,a} = 1/p_{a,c}$  で、(C) の (A, C) 市場では、(A) の  $\frac{p_{c,b} p_{b,a}}{\alpha}$  を取引し、 $\frac{p_{c,b} p_{b,a} p_{a,c}}{\alpha} = 1$  を手に入れることができる。

また、次のことがいえる。(A) で表わした (B) の真の価格は  $p_{b,a}$  ではなく  $p_{b,a} / \alpha$  である。つまり、(A, C) 市場を考えると、(A) で表わした (C) の価格が  $p_{c,a} = 1/p_{a,c}$  であるとき、(A) の  $p_{b,a} / \alpha$  で (C) の  $p_{b,a} p_{a,c} p_{a,b} / \alpha$  が手に入る。また、(B, C) 市場では、(C) で表わした (B) の価格が  $p_{b,c} = 1/p_{c,b}$  であるとき、(C) の  $p_{b,a} p_{a,c} / \alpha$  で、(B) の  $p_{b,a} p_{a,c} p_{a,b} / \alpha = 1$  を手に入れることができる。

そして最後に、(C) で表わした (A) の真の価格は  $p_{a,c}$  はなく、 $p_{a,c} / \alpha$  である。(C) の  $p_{a,c} / \alpha$  に対して、(C) で表わした (B) の価格  $p_{b,c} = 1/p_{c,b}$  で、(B, C) 市場で、(B) の  $p_{a,c} p_{c,b} / \alpha$  を手に入れることができる。さらに、(B) で表わした (A) の価格  $p_{a,b} = 1/p_{b,a}$  のとき (A, B) 市場で、(B) の  $p_{a,c} p_{c,b} / \alpha$  で (A) の  $p_{a,c} p_{c,b} p_{b,a} / \alpha = 1$  を手に入れることができる。

113. この点を具体的な数字を用いて明かにしてみよう。そこで  $p_{c,b} = 4$ 、 $p_{c,a} = 6$ 、そして  $p_{b,a} = 2$  とする。そうすると、 $\alpha = 1.33$  である。方程式

$\frac{4 \times 2 \times \frac{1}{6}}{1.33} = 1$  から、(B) で表わした (C) の価格から、4 ではなく  $4/1.33 = 3$  である。なぜならば、

(A, B) 市場で、(B) で表わした (A) の価格が  $1/2$  の場合、(B) の 3 単位で (A) の  $3 \times 2 = 6$  単

位が得られる。また、(A、B) 市場で (A) で表わした (C) の価格が6であるとき、(A) の6単位で (C) の  $6 \times 1/2 = 1$  が得られる。

われわれはまた、上の方程式から次のことがわかる。(A) で表わした (B) の真の価格は2でなく、 $2/1.33 = 1.5$  である。なぜならば、(A) の1.5単位に対して (A、C) 市場で (C) の  $1.5 \times 1/6 = 1/4$  が得られるからである。また、(B、C) 市場で (C) で表わした (B) の価格が  $1/4$  であるとき、(C) の  $1/4$  単位で、(B) の  $1/4 \times 4 = 1$  単位が手に入る。

そして、最後に、(C) で表わした (A) の真の価格は  $1/6$  ではなく、 $\frac{1}{6 \times 1.33} = \frac{1}{6}$  である。その理由は、(C) の  $1/3$  単位に対して (B、C) 市場では (C) で表した (B) の価格が  $1/4$  であるときには、(C) の  $1/8$  で、(B) の  $1/2$  が手にはいる。さらに、商品 (A,B) の市場では、(B) で表わした (A) の価格が  $1/2$  のとき、この (B) の  $1/2$  で (A) の  $1/2 \times 2 = 1$  を手に入れることができる。

#### 114.

明らかなことだが、(A)、(B)、(C) の保有者なら、次のような手段をとることにためらうことはないであろう。つまり、(A) と (B) の直接交換を、(A) と (C) との間接交換や (C) と (B) との間接交換に代える。(B) と (C) との直接交換を、(B) と (A) との間接交換や (A) と (C) との間接交換に代える。さらに (C) と (A) との直接交換を、(C) と (B) との間接交換と (C) と (B) の間接交換に代える。この間接交換は裁定と呼ばれる。

取引者が裁定によって実現する利益に関して、取引者は、最大満足を得るために商品の購入を追加しながら、さまざまな欲求に従って自ら望むように商品の配分を行うことになる。この極大条件とは、裁定取引から決まる真の価格に最終効用の強度の比が等しくなることである。しかし、今やこの点に深入りしない。というのは次の点に注目しておけば充分であるからである。すなわち、補充される需要は主たる需要の一部にすぎないからである。

すなわち、(A) の保有者は、(A) と (C)、(C) と (B) を交換するが、決して直接 (A) と (B) を交換しない。また、(B) の保有者は (B) と (A)、(A) と (C) を交換するが、決して (B) と (C) を直接交換しない。さらに、(C) の所有者は、(C) と (B)、(B) と (A) を交換するが、決して (C) と (A) を直接交換しない。そのときには、 $p_{b,a}$  は下落する。

(A、C) 市場では、(C) の需要と (A) の供給は常にある。しかし、(A) の需要も (C) の供給もない。だから  $p_{c,a}$  は上昇する。そして、(B、C) 市場では、(B) の需要と (C) の供給は常にある。しかし、(C) の需要も (B) の供給もない。だから  $p_{c,b}$  は下落する。

#### 115.

ここから明らかになったように、 $p_{c,b} > p_{c,a}/p_{b,a}$  の場合、市場均衡は成立せず、裁定取引が行われる。その結果、 $p_{c,b}$  は下落、 $p_{c,a}$  は上昇、そして  $p_{b,a}$  は下落する。また、次のことも明らかになる。 $p_{c,b} < p_{c,a}/p_{b,a}$  の場合、市場では裁定取引が行われる。その結果、 $p_{c,b}$  は上昇、 $p_{c,a}$  は下落、そして  $p_{b,a}$

は上昇する。

この場合に、 $\alpha < 1$  とすれば、

$$p_{c,b} = \alpha p_{c,a} / p_{b,a}$$

や

$$\alpha p_{c,b} p_{a,b} / p_{c,a} = 1$$

が成立する。これらの結果として、(C) で表わした (B) の真の価格は、(C) が (A) と交換され、(A) が (B) と交換されるならば、 $\alpha p_{b,c}$  となるであろう。また、(B) で表わされた (A) の真の価格は、(B) と (C) が交換され、(C) が (A) と交換されるならば、 $\alpha p_{a,b}$  となるであろう。そして、(A) で表わされた (C) の真の価格は、(A) が (B) と交換され、(B) と (C) が交換されるならば、 $\alpha p_{c,a}$  となるであろう。明らかに、(A)、(B) と (C) の価格について言えることは、任意の3商品の価格についてあてはまることである。それゆえ、人々が裁定取引を無視し、同時に市場での2商品の組み合わせから一般均衡を望むならば、任意の2商品の価格が第3の商品で表わされた、これらの商品の価格比に等しいという条件を導入する必要がある。換言すれば、次の方程式が満たされなければならない。

$$\begin{aligned} p_{a,b} &= 1/p_{b,a}, p_{c,b} = p_{c,a}/p_{b,a}, p_{d,b} = p_{d,a}/p_{b,a} \dots \\ p_{a,c} &= 1/p_{c,a}, p_{b,c} = p_{b,a}/p_{c,a}, p_{d,c} = p_{d,a}/p_{c,a} \dots \\ p_{a,d} &= 1/p_{d,a}, p_{b,d} = p_{b,a}/p_{d,a}, p_{c,d} = p_{c,a}/p_{d,a} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

ここでは、全部で  $(m - 1)(m - 1)$  個の一般均衡方程式が成立する。

その方程式体系には、それぞれの価格が逆数の関係になっていることを表わす  $m(m - 1) / 2$  個の方程式が暗に含まれている。また、他のすべての価格は価値尺度財で表わされている。

116.

言うまでもないが、これらの  $(m - 1)(m - 1)$  の条件を変えると、すでに展開された需要方程式と交換方程式の数と等しい数の方程式を減らすことが必要となる。これはまさしく単一市場が多数市場と代替されるときに起きる。つまり、他の商品と交換されるそれぞれの商品の需要と供給の均衡を表わす交換方程式は、他のすべての商品と交換される各商品の需要と供給の均等を表わす以下の交換方程式にとってかわるのである。

$$\begin{aligned} D_{a,b} + D_{a,c} + D_{a,d} + \dots &= D_{b,a} p_{b,a} + D_{c,a} p_{c,a} + D_{d,a} p_{d,a} + \dots \\ D_{b,a} + D_{b,c} + D_{b,d} + \dots &= D_{a,b} p_{a,b} + D_{c,b} p_{c,b} + D_{d,b} p_{d,b} + \dots \\ D_{c,a} + D_{c,b} + D_{c,d} + \dots &= D_{a,c} p_{a,c} + D_{b,c} p_{b,c} + D_{d,c} p_{d,c} + \dots \\ D_{d,a} + D_{d,b} + D_{d,c} + \dots &= D_{a,d} p_{a,d} + D_{b,d} p_{b,d} + D_{c,d} p_{c,d} + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

などで、全部で  $m$  個の方程式がある。しかし、これらの  $m$  個の方程式は  $(m - 1)$  個の方程式



に減らすことができる。もし、一般均衡方程式から解かれた価格を、それらの方程式に代入し、(A)で表わされた (B)、(C)、(D)・・・の価格を  $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・で表わすと、上の方程式は

$$\begin{aligned} D_{a,b} + D_{a,c} + D_{a,d} + \dots &= D_{b,a}p_b + D_{c,a}p_c + D_{d,a}p_d + \dots \\ D_{b,a} + D_{b,c} + D_{b,d} + \dots &= D_{a,b}1/p_b + D_{c,b}p_c/p_b + D_{d,b}p_d/p_b + \dots \\ D_{c,a} + D_{c,b} + D_{c,d} + \dots &= D_{a,c}1/p_c + D_{b,c}p_b/p_c + D_{d,c}p_d/p_c + \dots \\ D_{d,a} + D_{d,b} + D_{d,c} + \dots &= D_{a,d}1/p_d + D_{b,d}p_b/p_d + D_{c,d}p_c/p_d + \dots \\ \dots & \end{aligned}$$

となる。そして、さらに、これらの  $m$  個の方程式の第一の式を除いた  $(m - 1)$  個の方程式の最初の式の両辺に  $p_b$  を乗ずる。さらに、第 2 の式の両辺に  $p_c$  を乗ずる。第 3 の式の両辺には  $p_d$  を乗ずる。同じことを行くと  $(m - 1)$  個の方程式が得られる。さらに両辺から同じ項を消去する。ここから上述の第一方程式が得られる。それゆえに、第一の方程式は省略できる。よって、上の方程式体系は残った  $(m - 1)$  個の方程式からなる。

かくして、われわれは、最終的に、 $(m - 1)$  個の交換方程式を得ることができるが、それらに加えて、 $m(m - 1)$  個の需要方程式と  $(m - 1)(m - 1)$  個の一般均衡方程式から全体として、 $2m(m - 1)$  個の方程式体系を得る [111 節]。

これらの方程式の根は、 $m$  個の商品の相互間の  $m(m - 1)$  個の価格で交換される  $m$  個の商品量  $m(m - 1)$  個である。このように、需要方程式が与えられると価格は数学的に決定される。

そこで、明らかにしておかなければならないことが残っている。そして、ここが最も重要なことだが、ここまで理論的な解法を行ってきた交換問題は、自由競争のメカニズムによって市場で経験的に解法される全く同じ問題でもある。しかしながら、このことの証明を進める前に交換者が複数商品をそれぞれ保有して市場に参加する場合を検討することにしよう。この一般的ケースも極大満足の理論によって比較的容易にその問題を扱うことが可能になるであろう。

## 第 12 章 多数商品の交換問題の数学的解法<sup>2</sup>

117. 任意の数の商品交換において、2 商品の交換の場合と同じように、個人の有効需要方程式は、欲求の極大満足の条件によって数学的に決定される。正確に言うと、この極大満足の条件とは、2 商品の稀少性の比と、ある商品で表した別の商品の価格の均等が成立するである。

そうでなければ、これらの商品をさらに、お互いに交換すれば利益となるからである [80 節]。もし、各交換者が商品のみ保有者であれば、そして、裁定取引の機会を提供するために、 $m$  個の商品の  $m(m - 1)$  個の価格が一般均衡の条件とは無関係に 2 つ選ばれた商品の交換比率で叫ばれたならば、そのときには極大満足は各取引者によって達成されるであろう。つまり、各交換者が満足するのは、各交換者が需要する商品の稀少性と自らが所有する商品の稀少性の比が、最初に叫ばれた価格ではなく、裁定によって成立した真の価格に等しいときである。

しかし、もし各取引者が多数商品の保有者であるならば、またこの場合もし  $m$  個の商品の ( $m$

— 1) 個の価格が  $m$  番目の商品 (裁定取引が起こらないように、価格尺度財として選ばれた商品) を物差しにして叫ばれるならば、また、他の商品で表わされた  $m$  個の商品の価格が、価値尺度財で表わされたそれらの商品の価格の比に等しいならば、明らかに、価値尺度財以外の商品の稀少性と価値尺度財の商品の稀少性ととの比が叫ばれた価格に等しいとき、極大満足は各取引者によって、達成されるであろう。

118. いま、交換者 (1) が (A) の  $q_{a,1}$ 、(B) の  $q_{b,1}$ 、(C) の  $q_{c,1}$ 、(D) の  $q_{d,1}$  の保有者としよう。また、 $r = \phi_{a,1}(q)$ 、 $r = \phi_{b,1}(q)$ 、 $r = \phi_{c,1}(q)$ 、 $r = \phi_{d,1}(q)$  を一定期間における (A)、(B)、(C)、(D)・・・の効用方程式としよう。さらに、 $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・を (A) で表わした商品 (B)、(C)、(D)・・・のそれぞれの価格とする。

そして、 $x_1$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 、 $w_1$ ・・・をその個人が価格  $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・で期首に保有していた数量  $q_{a,1}$ 、 $q_{b,1}$ 、 $q_{c,1}$ 、 $q_{d,1}$ ・・・にそれぞれ加える (A)、(B)、(C)、(D)・・・などの追加分とする。これらの数量がプラスなら、需要量を表わし、マイナスなら、供給量を表わす。個々の取引では、商品を必要するには、同じ価値の商品を供給しなければならないので、もし  $x_1$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 、 $w_1$ ・・・のいくつかがプラスであるならば、他のものはマイナスである。よって、これらの数量間には、次の関係が成立する。

$$x_1 + y_1 p_b + z_1 p_c + w_1 p_d + \dots = 0$$

もし、極大満足が達成されると仮定すれば、それぞれの数量は明らかに次の関係式を満たしている。

$$\begin{aligned} \phi_{b,1}(q_{b,1} + y_1) &= p_b \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\ \phi_{c,1}(q_{c,1} + z_1) &= p_c \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\ \phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) &= p_d \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\ \dots \end{aligned}$$

これらの方程式は、全部で  $(m - 1)$  個の方程式からなる。前の方程式と合わせると、 $m$  個の方程式体系となる。これらの方程式から、 $m$  個の未知数 ( $x_1$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 、 $w_1$ ・・・) のうち  $(m - 1)$  個を消去すると仮定すれば、 $m$  番目の未知数を価格の関数として表わすたった 1 個の方程式だけを残すことができる。

よって、交換者 (1) による (B)、(C)、(D)・・・の需要・供給方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} y_1 &= f_{b,1}(p_b, p_c, p_d \dots) \\ z_1 &= f_{c,1}(p_b, p_c, p_d \dots) \\ w_1 &= f_{d,1}(p_b, p_c, p_d \dots) \\ \dots \end{aligned}$$

同じ交換者 (1) による (A) の需要と供給は次の方程式になる。

$$x_1 = - (y_1 p_b + z_1 p_c + w_1 p_d + \dots)$$

同様に、交換者 (2)、(3)・・・の場合、(B)、(C)、(D)・・・の需要・供給方程式は、以

下のように導くことができる。

$$\begin{aligned}
 y_2 &= f_{b,2}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 z_2 &= f_{c,2}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 w_2 &= f_{d,2}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_3 &= f_{b,3}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 z_3 &= f_{c,3}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 w_3 &= f_{d,3}(p_b, p_c, p_d \dots) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

一方、(A) のそれぞれの需要量と供給量は、方程式

$$\begin{aligned}
 x_2 &= - (y_2 p_b + z_2 p_c + w_2 p_d + \dots) \\
 x_3 &= - (y_3 p_b + z_3 p_c + w_3 p_d + \dots) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

によって与えられる。このようにして、すべての人の取引行動はさまざまな商品の有する効用や期首保有量から、導かれるのである。しかしながら、これから先を進める前に、配慮すべき重要な事柄がある。

119. 各商品の価格が  $p_b, p_c, p_d \dots$  である場合において、 $y_1$  がマイナスであることもありえる。それは、交換者 (1) が (B) を需要しないで (B) を供給する場合である。 $y_1$  が  $-q_{b,1}$  に等しいことさえある。そのときは、交換者 (1) が (B) を手元に全く残さない場合である。

(m - 1) 個の極大満足方程式体系に、この  $y_1$  の値を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \phi_{b,1}(0) &= p_b \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\
 \phi_{c,1}(q_{c,1} + z_1) &= p_c \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\
 \phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) &= p_d \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

となる。上の方程式群から導かれる  $p_b, p_c, p_d \dots$  の値を、

$$x_1 + z_1 p_c + w_1 p_d + \dots = q_{b,1} p_b$$

に代入すると、

$$x_1 \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) + z_1 \phi_{c,1}(q_{c,1} + z_1) + w_1 \phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) + \dots = q_{b,1} p_b$$

が得られる。この方程式から、以下のような説明ができる。

1つの商品の供給が、その商品の保有量と等しくなるためには、効用曲線の内側にできる四角形を描くことができなければならない。

なぜならば、効用曲線の内側の面積は、需要された商品の保有量によって満たされる欲求を表わしているからである。よって、四角形の面積の合計は、高さを期首保有量、底辺を欲求の強度とする矩形の面積に等しい。

この条件は満たされることも、満たされないこともある。もし、この条件が満たされるならば、交換者(1)の(B)の供給は、ある状況の下で、その交換者が期首に保有する量 $q_{b,1}$ に等しい。いずれにせよ、(B)の供給は、(B)の期首保有量を上回ることはない。ここから考えられる重要なポイントは、(B)の需要や供給方程式は、 $y_1$ をマイナスにし、かつ $q_{b,1}$ より大きくする $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d \dots$ のすべての値に対しては $y_1 = -q_{b,1}$ に置き換える必要があるということである。

以上のことは、 $p_c z_1$ 、 $w_1 \dots$ をマイナスにし、 $q_{c,1}$ 、 $q_{d,1} \dots$ をより大きくする $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d \dots$ の値を持つ(C)、(D)の需要・供給方程式にもあてはまる。

第二に、これらの方程式は、 $z_1 = -q_{c,1}$ 、 $w_1 = -q_{d,1} \dots$ にも同様に置き換えられる。それゆえ、(B)の需要・供給方程式にも手を加える必要がある。

たとえば、 $z_1 = -q_{c,1}$ であるならば、交換者(1)の(B)の需要・供給方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 p_b + w_1 p_c p_d + \dots &= q_{c,1} p_c \\ \phi_{b,1}(q_{b,1} + y_1) &= p_b \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\ \phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) &= p_d \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1) \\ \dots & \end{aligned}$$

ここには、全部で $(m-1)$ 個の方程式がある。この方程式体系から、 $x_1$ 、 $w_1 \dots$ のような $(m-2)$ 個の未知数を消去する。よって、 $y_1$ を $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d \dots$ の関数として表わすたった1本の方程式が残るだけになる。

$w_1 = -q_{d,1} \dots$ のときも、手続きは同じになる。これ以上は説明がなくとも、容易に理解できることだが、同じ手続きは、供給が商品(C)、(D)のうちの1つの保有量に等しい場合のみならず、この均等が2つ、3つ、4つ $\dots$ の商品、あるいは一般的に言えば、多数商品の場合にも有効であるということである。

121. これまで価格尺度財(A)の需要、供給方程式については何も論じていない。なぜならば、価格尺度財の方程式は特別な形になるからである。明らかに、 $x_1 = -q_{a,1}$ によって $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d \dots$ を置き換えなければならない。これらの値は $x_1$ をマイナスにし、 $x_1$ を $q_{a,1}$ より大きくするからである。その上、その場合には、交換者(1)の(B)の需要と供給を決定する方程式体系は、次のようになる。

$$\begin{aligned} y_1 p_b + z_1 p_c + w_1 p_d + \dots &= q_{a,1} \\ p_b \phi_{c,1}(q_{c,1} + z_1) &= p_c \phi_{b,1}(q_{b,1} + y_1) \\ p_b \phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) &= p_d \phi_{b,1}(q_{b,1} + y_1) \\ \dots & \end{aligned}$$

上の式は、前と同じように、全部で $(m-1)$ 個の方程式からなっている。そこから、 $z_1$ 、 $w_1 \dots$ のような $(m-2)$ 個の未知数を順次消去できる。それゆえ、 $y_1$ を $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d \dots$ の関数として表わすたった1本の方程式が残る。

122. これまでの制約を満たすような方法で需要・供給方程式を説明することは、疑いもなく多かれ少なかれ容易なことではない。しかし、確実に言えることは、これは重要なことであって、(A) で表わされた (B)、(C)、(D)・・・のたとえば  $p'_b$ 、 $p'_c$ 、 $p'_d$ ・・・がいったん呼ばれると、問題とするすべての商品の需要量と供給量は、供給が保有量に等しいという事実を考慮に入れると、完全に決定されるということである。

次に、このことは証明しなければならない。

$$q = \psi_{a,1}(r), q = \psi_{b,1}(r), q = \psi_{c,1}(r), q = \psi_{d,1}(r) \dots$$

を商品 (A)、(B)、(C)、(D)・・・に対する交換者 (1) の効用方程式であるとしよう。これらの方程式は商品の数量について解かれたものであって、稀少性について解かれたものではない。すべての交換取引が終わると、

$$\begin{aligned} q_{a,1} + x_1 &= \psi_{a,1}(r_{a,1}) \\ q_{b,1} + y_1 &= \psi_{b,1}(r_{b,1}) \\ q_{c,1} + z_1 &= \psi_{c,1}(r_{c,1}) \\ q_{d,1} + w_1 &= \psi_{d,1}(r_{d,1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

ばかりでなく、

$$\begin{aligned} p_a q_{a,1} + p_b q_{b,1} + p_c q_{c,1} + p_d q_{d,1} + \dots &= \\ p_a \psi_{a,1}(r_{a,1}) + p_b \psi_{b,1}(r_{b,1}) + p_c \psi_{c,1}(r_{c,1}) &+ \\ + p_d \psi_{d,1}(r_{d,1}) + \dots & \end{aligned}$$

も成立する。なお、後者は交換数量の価値の均等化条件と極大満足の条件〔118節〕によって得られる。この式から  $r'_{a,1}$  が得られる。 $r'_{a,1}$  が分かると  $r'_{b,1}$ 、 $r'_{c,1}$ 、 $r'_{d,1}$ ・・・が解ける。従って、 $x'_1$ 、 $y'_1$ 、 $z'_1$ 、 $w'_1$ ・・・も解ける。手に入れた唯一の商品の最初の欲求の強度は、価格と  $r'_{a,1}$  の積より大きい商品である。

もし  $r'_{d,1}$  が (A) の最初の欲求の強度より大きいならば、交換者 (1) は価値尺度財として役立つ商品を必要も供給もしないであろう。

123. 交換者 (1)、(2)、(3)・・・による (A)、(B)、(C)、(D)・・・の需要・供給方程式は、上述の制約を満たすような方法で、仮定によって適切に組み立てられてきたので、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $w$ ・・・を

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots &, \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots &, \\ z_1 + z_2 + z_3 + \dots &, \\ w_1 + w_2 + w_3 + \dots &, \\ &\dots \end{aligned}$$

の合計を表わすものとしよう。

また、 $F_b$ 、 $F_c$ 、 $F_d$ ・・・を、 $f_{b,1}$ 、 $f_{b,2}$ 、 $f_{b,3}$ ・・・、 $f_{c,1}$ 、 $f_{c,2}$ 、 $f_{c,3}$ ・・・、 $f_{d,1}$ 、 $f_{d,2}$ 、 $f_{d,3}$ ・・・の関

数の合計としよう。(A)、(B)、(C)、(D)・・・の需給均等条件は、一般的に、方程式  $X = 0$ 、 $Y = 0$ 、 $Z = 0$ 、 $W = 0$ ・・・によって表わされるので、市場均衡価格の決定のための方程式は、

$$\begin{aligned} F_b(p_b, p_c, p_d \dots) &= 0 \\ F_c(p_b, p_c, p_d \dots) &= 0 \\ F_d(p_b, p_c, p_d \dots) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

となる。これらの方程式は全部で、 $(m - 1)$  個の方程式からなる。

その上、 $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・は、本来プラスであるから、もし、上の方程式が満たされるならば、すなわち、 $Y = 0$ 、 $Z = 0$ 、 $W = 0$ ・・・であるならば、

$$X = - (Yp_b + Zp_c + Wp_d + \dots)$$

が成立することは明らかである。

124. かくて、 $m$  個の商品のうちの  $(m - 1)$  個の価格は、価格尺度財として役立つ  $m$  番目の商品で表わすことができるために、数学的に決定できる。そのとき、次の三つの条件が満たされる。

まず、すべての交換者は欲求の極大満足を得る。そのときには稀少性の比は価格に等しい。

次に、すべての交換者によって、売買される数量は等しい。そのとき、価格尺度財で表わした価格は1つだけである。その価格は、有効需要と有効供給を等しくさせる価格である。

さらに、裁定取引は存在しない。他の商品で表わした2商品の均衡価格は第3の商品で表わしたこれらの2商品の価格に等しい。そこで、科学的解法を示すために、市場で多数商品の交換問題が競争のメカニズムによって市場で、経済的に解けるものであるかを考えてみることにしよう。

125. まず第1に、実際に市場で起きることは、 $m$  個の商品の  $m(m - 1)$  個の価格は価値尺度財を用いることによって  $(m - 1)$  個の価格に減らすことができる。

この  $m$  番目の商品が、価値尺度財である。互いの商品で表わした残りの商品の  $m(m - 1)$  個の価格は、一般均衡の条件に従って、価値尺度財で表わした商品の価格比に等しい。(A) で表わされた (B)、(C)、(D)・・・の  $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・を偶然に呼ばれた  $(m - 1)$  個の価格としよう。これらの価格で各交換者は、(A)、(B)、(C)、(D)、・・・の需要と供給を決定する。若干の配慮をただけで、きちんと計算もしないで到達した意思決定があたかも適切な制約条件に従って需要・供給の極大満足の方程式体系の数学的解法によって行われているかのようなものである。ここで、

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3 \dots, \\ y'_1, y'_2, y'_3 \dots, \\ z'_1, z'_2, z'_3 \dots, \\ w'_1, z'_2, z'_3 \dots \end{aligned}$$

がマイナスやプラスであるとし、それらは価格が  $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ ・・・のときの個人の需要・供給を表わすとする。もし、すべての商品の総需要が総供給と等しいならば、換言すれば、もし、 $Y' = 0$ 、

$Z' = 0, W' = 0, \dots$  を即座に認識し、 $X' = 0$  であれば、これらの価格で交換が行われ、それで問題は解決する。

しかしながら、一般的には、総需要はすべての商品の総供給に等しくなく、 $Y' = 0, Z' = 0, W' = 0$  である。その結果、 $X' = 0$  である。そのとき、市場にはどのようなことが起っているのだろうか。もしある商品の需要が供給より多いならば、価格尺度財で表わしたその商品の価格は上昇する。

一方で、供給が需要を上回るならば、価格は下落する。このとき、理論的解法が市場によって解かれる解法と同じであることを証明するために、出来ることは何なのか。

行なうべき作業は単純である。一つの明かにすべきことは、模索過程による価格の上昇や下落こそが、需要と供給の方程式体系の解法に一役を買う。

### 126. ここで、方程式

$$X' + Y'p_b + Z'p_c + W'p_d \dots = 0$$

再び取り上げよう。この方程式は

$$D'_a - O'_a + (D'_b - O'_b)p'_b + (D'_c - O'_c)p'_c + (D'_d - O'_d)p'_d + \dots = 0$$

のように書き換えることができる。 $D'_a, D'_b, D'_c, D'_d, \dots$  は正の  $x's, y's, z's, w's, \dots$  の合計を表わし、 $O'_a, O'_b, O'_c, O'_d, \dots$  は負の  $x's, y's, z's, w's, \dots$  の合計を表わしている。ただ、このときの価格は  $p'_b, p'_c, p'_d, \dots$  である。 $p'_b, p'_c, p'_d, \dots$  は本来プラスなので、数量  $X' = D'_a - O'_a, Y' = D'_b - O'_b, Z' = D'_c - O'_c, W' = D'_d - O'_d, \dots$  はプラスである。その場合、これ以外のものはマイナスである。もちろん、逆も真である（これらの数量のいくつかがマイナスならば、他の数量はプラスである）。

このことが意味していることは、もし、価格  $p'_b, p'_c, p'_d, \dots$  において、いくつかの商品の需要がそれらの供給を上回るならば、そのときには他の商品の供給はそれらの商品の需要を上回らなければならない。

### 127. ここで不等式、

$$F_b(p'_b, p'_c, p'_d, \dots) \geq 0$$

を考えることにしよう。上の不等式を次のように書き直すことができる。

$$\Delta_b(p'_b, p'_c, p'_d, \dots) \geq \Omega_b(p'_b, p'_c, p'_d, \dots)$$

ここで関数  $\Delta_b$  は、正の  $y's$  の合計や  $D_b$  であり、関数  $\Omega_b$  は負の  $y's$  の合計や  $O_b$  である。ここで、 $p_c, p_d, \dots$  を捨象する。なぜならば、これらの価格はすでに決定されているからである。それゆえに、 $p_b$  だけが決定すべき価格であることから、(B) の需要が供給に等しくなるために  $p_b$  がゼロと無限大の間で、いかに変化するか見つけることにしよう。関数  $F_b$  も関数  $\Delta_b$  や  $\Omega_b$  も分からないけれども、以前の交換理論から、現在の目的のために十分な情報を手に入れることができる。

つまり、これまでの交換についての研究から分かったことは次のことである。もし、交換が存在

するならば、関数  $F_b$  をゼロに等しくするか、 $\Delta_b$ 、 $\Omega_b$  関数を互いに等しくする値を  $p_b$  がどのようにして決定するかを教えてください。

128. まず、関数  $\Delta_b$  から始める。この関数は、(A)、(C)、(D)・・・と交換する (B) の需要関数である。この関数は、 $p_b = 0$  つまり (A)、(B)、(C)、(D)・・・であらわされた (B) の価格がゼロのとき、プラスである。

実際に、これらの価格ゼロの下で、(B) に対する総有効需要は (B) の総外延効用が (B) の総保有量を上回る数量に等しい。そして、商品 (B) は稀少な社会的富の一部を形成するならば、この超過分はプラスである。もし  $p_b$  が、(A)、(C)、(D)・・・で表わした (B) のさまざまな価格が同じ比率で上昇するような方法で上昇するならば  $\Delta_b$  は減少関数であるので、減少する。

実際に、商品 (B) は、(A)、(C)、(D)、・・・と関連して、次々と高くなる。この仮定の下では、(B) の需要が増加することは考えられないことである。(B) の需要はただ減少するのみである。その上、 $p_b$  の価格 ((A)、(C)、(D)・・・で表わした (B) の価格) が非常に高くなり、(B) の需要がゼロとなるほど高くなると想定することはできる。

次に、注意を関数  $\Delta_b$  に向けてみよう。これは (A)、(C)、(D)・・・と交換される (B) の供給関数である。その供給関数は  $p_b = 0$  のときにはゼロである。それは、(A)、(C)、(D)・・・で表わされた (B) の価格がゼロでもプラスでもゼロでもあるからだ。

実際に、(A)、(C)、(D)・・・で表わされた (B) の価格が非常に高ければ、(B) の需要がゼロと想定できるように、(B) で表わした (A)、(C)、(D)・・・の価格がかなり高いと、これらの商品の需要がゼロとなることは想像できよう。その場合には、(B) の供給はゼロとなる。もし、(A)、(C)、(D)・・・で表わした (B) のさまざまな価格がすべて正比例して上昇するように  $p_b$  が上昇するならば、関数  $\Omega_b$  は、最初は増加し、それから減少する。なぜならば、その関数は、最初は増加し、それから減少する関数の合計であるからだ。この場合、商品 (A)、(C)、(D)・・・は (B) との関係が徐々に低下する。そして、それらの需要は、(B) の供給の連続的変化に対応する。しかし、この供給は無限には増加しないであろう。供給は少なくとも1つの極値を通る。その極値は総保有量より多くはない。それから、もし  $p_b$  が無限大となる (すなわち (A)、(C)、(D)・・・が自由財) ならば、(B) の供給は減少し、ゼロに向かう。

129. これらの条件の下で、 $D_b$  と  $O_b$  が等しくなる  $p_b$  のある値がある。そうならないのは、 $p_b$  がゼロから上昇を始める前に、 $D_b$  がゼロに下落する場合である。この場合には、解は存在しない。しかしながら、そのようなケースは商品を二つ以上保有する人が交換者として存在する限り起こりえない。

$p_b$  の均衡値が決まるためには、 $p'_b$  が  $Y' > 0$  の時、つまり、その価格で  $D'_b > O'_b$  のときには、いつでも上昇しなければならぬ。また、 $Y' < 0$  のとき、すなわち、 $D'_b < O'_b$  のときにはいつでも、 $p'_b$  は下落しなければならぬ。かくして、次の方程式にたどりつく。



$$F_b(p''_b, p'_c, p'_d \dots) = 0$$

一旦、この操作が実行されると、不等式

$$F_c(p'_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0$$

は

$$F_c(p''_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0$$

になる。しかし、この不等式は、その価格の下で、 $Z \leq 0$  (すなわち、 $D'_c \leq O'_c$ ) に従って  $p'_c$  が上昇したり下落したりすることによって、

$$F_c(p''_b, p''_c, p''_d \dots) = 0$$

となる。

同様にして、次の方程式

$$F_d(p''_b, p''_c, p''_d \dots) = 0$$

などが得られる。

130. これらの操作が実行された後で、

$$F_b(p''_b, p''_c, p''_d \dots) \geq 0$$

が成立する。ここで残っている証明は、この不等式は

$$F_b(p'_b, p'_c, p'_d \dots) \geq 0$$

より、等式に近いということである。

上の不等式を等式にする  $p'_b$  から  $p''_b$  への変化が (B) の需要に関する限り、等式への直接的影響を発生させる。一方、 $p'_c$  から  $p''_c$ 、 $p'_d$  から  $p''_d \dots$  へと変化すれば、(B) の需要に関する限り不等式から等式に近づく間接的な影響を及ぼすであろう。それゆえに、新しい価格体系  $p''_b$ 、 $p''_c$ 、 $p''_d \dots$  は、古い価格体系  $p'_b$ 、 $p'_c$ 、 $p'_d \dots$  より均衡により近づいていくであろう。体系が均衡に少しずつ近づいていくことは同じ流れに沿って、このプロセスを続けることが必要である。

われわれは、今や価値尺度財の仲介により多数商品の相互の交換におけるにおける均衡価格成立の法則を定式化することができる。すなわち、複数の商品があり、それらが価値尺度財を仲介して交換されるとき、市場が均衡状態になるためには、あるいは価値尺度財で表わされる各商品の価格が定常価格として成立するためには、これらの価格でもって各商品の有効需要がその商品の有効供給に等しくなることが必要かつ十分条件である。均衡が存在しないとき、有効需要が有効供給を上回る商品の価格は上昇し、有効供給が有効需要を上回る商品の価格は下落する。

注

- 1 本章は、第 11 章 (*Problème de l'échange de plusieurs marchandises entre eux. Théorème de l'équilibre général*) の全訳である。
- 2 本章は、第 12 章 (*Formule générale de solution mathématique du problème de l'échange de plusieurs marchandises entre eux. Loi d'établissement des prix marchandises*) の全訳である。