Rabinovitch（1989）の枠組みによる値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物価格式

石　井　昌　宏

1　イントロダクション

派生証券価格理論はBlack and Scholes（1973）とMerton（1973）に始まる。そして，Harrison and Pliska（1981）により，ある範囲の派生証券（たち）の価格を完備市場において評価する枠組みが完成した。Baxter and Rennie（1996）およびSteele（2000）にはこの議論の枠組みが詳細に記載されている。

派生証券価格理論の展開の一つは，新しいオプションをデザインし完備市場における派生証券価格評価の枠組みの中でその価格式を導出することである。例えば，Geske（1979），Kemna and Vorst（1990），Conze and Viswanathan（1991），Miura（1992），Heynen and Kat（1994），Fujita and Miura（2003）などがその研究成果である。それぞれ，コンパウンドオプション，アベレージオプション，ルックバックオプション，クォンタイルオプション，バリアオプション，江戸っ子オプションを扱っている。

他の展開の一つは，より現実を反映した派生証券価格評価の枠組みを研究することである。その一例がRabinovitch（1989）である。Rabinovitch（1989）では，瞬間的スポットレートと株価が不確実に変動する下でのヨーロピアンバニラオプション価格式を導出している。他の例にはデフォルトリスクを考慮に入れたJarrow and Turnbull（1995）およびJarrow, Lando and Turnbull（1997）がある。

Cox, Ingersoll and Ross（1981）やJarrow and Oldfield（1981）が先物価格と先渡価格の関係についての先駆的研究である。Miura and Kishino（1995）では，値洗いが連続的に行われる場合のゼロクーポン債先物価格式が導出されている。しかし，Rabinovitch（1989）の枠組みの中で，値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物価格式を導出することはまだ行われていないようである。そこで，本研究ではそれを行う。したがって，本研究の位置づけは派生証券価格理論の後者の展開の一つである。現実の派生証券取引における日経225先物の取引量の比率を考えると，本研究に現実的有用性はあると考えられる。より現実に近いモデルを作ることはもちろん意義がある。しかし，銀行や証券会社におけるリスク管理の視点においては，本研究はある種のgeneral nonsenseかもしれない。

なお，ここで，先物（futures）と先渡（forward）という２つの契約について簡単に記述しておく。先渡は「将来のある時点において，前もって決めた価格で資産（株式，債券，商品など）を売買する」という契約である。先物は先渡に似た契約である。しかし，先渡と先物は「先物契約では値洗いが日々行われる」という点で異なる。

本論文の構成は以下の通りである。第２節では，第４節の議論の意義を明確にするために，瞬間的スポットレートが一定の場合の先物価格と先渡価格の関係について述べる。第３節では，Rabinovitch（1989）の派生証券価格評価の枠組みを Harrison and Pliska（1981）のスタイルで説明する。そして，第４節では，Rabinovitch（1989）の派生証券価格評価の枠組みを用いて「値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物価格式」を導出する。第５節に今後の展開を述べる。

2 瞬間的スポットレートが一定の場合の株式先物価格式

瞬間的スポットレートを一定とするモデルでは株式先物価格と株式先渡価格が一致することをこの節で示す。この議論は Hull（2005）や三浦（1989）でも紹介されている。この議論を本節で紹介する目的は，第４節の意義をより明確にすることにある。

$T>0,\ n\in\mathrm{N},\ h=\frac{T}{n}$ とする。各 $j=0, 1, \ldots, n$ について，$t_j=jh$ とする。０をある株式を原資産とする先物および先渡の契約時点，T をこれらの契約の満期時点とよぶ。さらに，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ をこの先物契約の値洗い時点とよぶ。X をある確率過程とし，$\forall t\in[0,\infty)$ について，$X(t)$ をこの株式の t 時点での価格とよぶことにする。このモデルでは株式の配当を考慮に入れていないことを注意しておく。各 $t\in[0,\infty)$ について，$\mathcal{F}_t=\sigma\left(\{X(s)\mid 0\leq s\leq t\}\right)$ とする。各 $j=0, 1, \ldots, n$ について，F_j を $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測関数とし，「t_j 時点で定まる T 時点を満期とする先物価格」とよぶことにする。正の定数 f_0 を「０時点で定まる T 時点を満期とする先渡価格」とよぶことにする。正の定数 r を瞬間的スポットレートとよぶことにする。ここで，$0\leq s\leq t$ に対して，$e^{-r(t-s)}$ を「t 時点を満期とし償還額を１とするゼロクーポン債の s 時点の価格」とよぶことにする。すなわち，このモデルではクレジットリスクを考慮に入れない。なお，上記で定めた記号は本節のみにおいて用いることとする。

それでは，「０時点で定まる T 時点を満期とする先物価格」と「０時点で定まる T 時点を満期とする先渡価格」が一致することを示す。すなわち，$F_0=f_0$ を示す。なお，明らかに $F_n=X(T)$ であることに注意しておく。２種類のポートフォリオを考える。第１のポートフォリオは「資金 F_0 で T 時点を満期とするゼロクーポン債 $F_0\cdot e^{rT}$ 単位を０時点で購入し，それを T 時点まで保有すること」と次に説明する取引からなる。

各 $j=0, 1, \ldots, n-1$ について，t_j 時点で T 時点を満期とする先物の買いポジションを $e^{r(j+1)h}$ 単位とする。しからば，

$$\left(F_{j+1}-F_j\right)e^{r(j+1)h} \tag{1}$$

は t_{j+1}時点で行われる値洗いによりこのポジションから発生する損益を表している。次に，

$$\left(F_{j+1}-F_j\right)e^{r(j+1)h}\cdot e^{r\{n-(j+1)\}h}=\left(F_{j+1}-F_j\right)e^{rT} \tag{2}$$

は「(1)が正の場合は，その金額をゼロクーポン債で t_n 時点まで運用し，(1)が負の場合は，その金額をゼロクーポン債発行により t_n 時点まで借り入れる」という取引を表現している。

このことから，

$$F_0\cdot e^{rT}+\sum_{j=0}^{n-1}\left(F_{j+1}-F_j\right)e^{rT}=F_0\cdot e^{rT}+\left(F_n-F_0\right)e^{rT}=X(T)\cdot e^{rT} \tag{3}$$

は「T 時点における第1のポートフォリオのペイオフ」を表している。

第2のポートフォリオは「資金 f_0 で T 時点を満期とするゼロクーポン債 $f_0\cdot e^{rT}$ 単位を0時点で購入し，それを T 時点まで保有すること」と「T 時点を満期とする先渡買いポジションを e^{rT} 単位とする」から構成される。そうすると，

$$f_0\cdot e^{rT}+\left(X(T)-f_0\right)e^{rT}=X(T)\cdot e^{rT} \tag{4}$$

が「T 時点における第2のポートフォリオのペイオフ」を表している。以上により，(3)と(4)より，もし $F_0\neq f_0$ ならば裁定機会が生ずることになる。したがって，$F_0=f_0$ である。

ここで，上述の議論は「正の定数 r を瞬間的スポットレートとして用いること」すなわち「金利を一定とするモデル」に依存していることを強調しておく。すなわち，「Rabinovitch（1989）の枠組み」すなわち「金利と株価が不確実に変動するモデル」においては，上述の議論は成立しない。

それでは，$f_0=X(0)\cdot e^{rT}$ を示しておく。仮に $f_0<X(0)\cdot e^{rT}$ とする。このとき，0時点において次の3資産からなるポートフォリオを保有する。

資産1：T 時点を満期とし株式1単位を空売りする。

資産2：T 時点を満期とするゼロクーポン債を $X(0)\cdot e^{rT}$ 単位購入する。

資産3：T 時点を満期とし f_0 を先渡価格とする先渡を1単位買い契約する。

もちろん，0時点におけるこのポートフォリオの価値は0である。そうすると，

$$-X(T)+X(0)\cdot e^{rT}+(X(T)-f_0)=X(0)\cdot e^{rT}-f_0>0$$

が T 時点におけるこのポートフォリオの価値を表現している。したがって，上記のポートフォリオを0時点で資金0で保有でき，T 時点では確率1でそのポートフォリオから正のキャッシュフローを得ることが出来る。これでは裁定機会が生ずることになる。今度は，$f_0>X(0)\cdot e^{rT}$ と仮定する。このとき，0時点において次の3資産からなるポートフォリオを保有する。

資産1：T 時点を満期とするゼロクーポン債を $X(0)\cdot e^{rT}$ 単位発行する。

資産2：株式1単位を購入する。

資産3：T 時点を満期とし f_0 を先渡価格とする先渡を1単位売り契約する。

やはり0時点におけるこのポートフォリオの価値は0である。そうすると，

$-X(0)\cdot e^{rT}+X(T)+(f_0-X(T))=f_0-X(0)\cdot e^{rT}>0$

がT時点におけるこのポートフォリオの価値を表現している。したがって，上記のポートフォリオを0時点で保有すれば，T時点では確率1で正のキャッシュフローを得ることが出来る。これでは裁定機会が生ずることになる。以上により，

$$f_0=X(0)\cdot e^{rT} \tag{5}$$

を得る。

ここで，$f_0=X(0)\cdot e^{rT}$を導出する議論は「正の定数rを瞬間的スポットレートとして用いること」すなわち「モデルの中で金利を一定とすること」に依存していないことを注意しておく。

3 Rabinovitch（1989）の派生証券価格評価の枠組み

本節では，Rabinovitch（1989）の派生証券価格評価の枠組みを述べる。ただし，Rabinovitch（1989）そのままではなく，それをHarrison and Pliska（1981）スタイルにして述べる。なお，本節における記号設定を次節でも用いる。

（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とする。$W=(W_1,W_2)$を2次元ブラウン運動とする。$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$をthe standard Brownian filtrationとする。$T>0$とする。（Ω，$\mathcal{F}_T$）上でPと同値な確率測度をQで表す。Harrison and Pliska（1981）の派生証券価格評価の枠組みにおいて，Qはマルチンゲール測度またはリスクニュートラル測度とよばれる。$Z=(Z_1,Z_2)$をQの下での2次元ブラウン運動とする。そして，確率過程X_1とX_2を次のように定義する。各$t\geq 0$に対して，

$$X_1(t)=x_1\,e^{-at}+ab\int_0^t e^{-a(t-u)}du+c\int_0^t e^{-a(t-u)}dZ_1(u), \tag{6}$$

$$X_2(t)=x_2\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma\left(\rho Z_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\,Z_2(t)\right)+\int_0^t X_1(u)du\right\}, \tag{7}$$

ただし，x_1，x_2，a，b，c，σは正の定数とし，$|\rho|<1$とする。ここで，$X_1(t)$を「t時点における瞬間的スポットレート」とよび，$X_2(t)$を「t時点における株式価格」とよぶ。なお，このモデルにおいても株式からの配当支払いとクレジットリスクを考慮に入れないことを注意しておく。

$0\leq t\leq u\leq T$とする。任意の$\mathcal{F}_u$可測関数Yに対して，

$$E_{\mathrm{Q}}\left(Y\cdot e^{-\int_t^u X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) \tag{8}$$

を「満期をu時点としペイオフYを持つ派生証券のt時点における価格」と解釈する。

例えば，$Y=1$とすれば，(8)は「満期をu時点とし償還額1のゼロクーポン債のt時点における価格」を表していることになる。これを具体的に計算すると，

$$P(t,u):=E_{\mathrm{Q}}\left(1\cdot e^{-\int_t^u X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) \tag{9}$$

$$=e^{A(t,u)-B(t,u)X_1(t)}$$

となる。ただし，

$$A(t,u)=\left(b-\frac{c^2}{2a^2}\right)(B(t,u)-(u-t))-\frac{1}{a}\left(\frac{c}{2}B(t,u)\right)^2,$$

$$B(t,u)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(u-t)}\right),$$

である。

さらに，K を正の数とし，$Y=X_2(u)-K$ とすれば，(8)は「満期を u 時点とし満期でのペイオフ $X_2(u)-K$ を持つ派生証券の t 時点における価格」を表していることになる。これを具体的に計算すると，

$$E_Q\left(\left(X_2(u)-K\right)\cdot e^{-\int_t^u X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_t\right)$$
$$=X_2(t)-KP(t,u)$$

となる。これより，

$$X_2(t)-KP(t,u)=0$$

を満たす K が「u 時点を満期とする先渡を t 時点で契約するときの先渡価格」を表現している。すなわち，先渡価格式

$$f(t,u):=\frac{X_2(t)}{P(t,u)} \tag{10}$$

を得る。もちろん，第2節と同様の議論によっても(10)を得られる。

4　Rabinovitch（1989）の枠組みにおける株式先物価格式

第3節の設定の下で，値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物価格式を導出する。Miura and Kishino（1995）では，第2節で $F_0=f_0$ を示すときに用いた取引システムを修正することにより，金利が不確実に変動し連続的に値洗いが行われる場合のゼロクーポン債先物価格式を導出している。しかし，値洗いが離散時間で行われる場合にはその方法を適用することが出来ない。そこで，本研究では以下に述べるように満期からバックワードに先物価格式を導出する方法を用いた。

$n\in\mathrm{N}$, $h=\frac{T}{n}$ とする。各 $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ について，$t_j=jh$ とする。時点0において，満期を T 時点とする先物を契約することにする。そして，各 $j=1, 2, \ldots, n$ について，t_j をこの先物の値洗い時点とよぶ。各 $j=0, 1, \ldots, n$ について，F_j を $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測関数とし，「t_j 時点で定まる T 時点を満期とする先物価格」とよぶことにする。明らかに，$F_n=X_2(T)$ である。

STEP 1：t_{n-1} 時点

仮定より（t_{n-1}，t_n）において先物の値洗いは行われない。そこで，仮に $F_{n-1}>f(t_{n-1},\ T)$ ならば次のポートフォリオを t_{n-1} 時点で保有する。

資産1：T 時点を満期とし F_{n-1} を先物価格とする先物を1単位売り契約する。

資産2：T 時点を満期とし $f(t_{n-1},\ T)$ を先渡価格とする先渡を1単位売り契約する。

しからば，

$$(F_{n-1}-X(T))+(X(T)-f(t_{n-1}, T))=F_{n-1}-f(t_{n-1}, T)>0$$

が「T 時点において，このポートフォリオから得られるキャッシュフロー」を表している。したがって，上記のポートフォリオを t_{n-1} 時点で資金0で保有することができ，T 時点では確率1でそのポートフォリオから正のキャッシュフローを得ることが出来る。これでは裁定機会が生ずることになる。同様にして，$F_{n-1}<f(t_{n-1}, T)$ でも裁定機会が生ずる。

したがって，$F_{n-1}=f(t_{n-1}, T)$ を得る。

STEP 2 ：t_{n-2} 時点

y を正の数とする。t_{n-2} 時点において，「t_{n-1} 時点に $F_{n-1}-y$，t_n 時点に F_n-F_{n-1}」というキャッシュフローをもたらす派生証券を考える。このキャッシュフローを表にすると以下の通りである。

時点	キャッシュフロー
t_{n-1}	$F_{n-1}-y$
t_n	$F_n-F_{n-1}=X_2(T)-F_{n-1}$

第3節より，この派生証券の t_{n-2} 時点における価格は

$$E_Q\left((F_{n-1}-y)\cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)+E_Q\left((F_n-F_{n-1})\cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_n}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)$$

$$=E_Q\left((F_{n-1}-y)\cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)$$

となる。上式において，

$$E_Q\left((F_n-F_{n-1})\cdot e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right)=0$$

と

$$E_Q\left((F_n-F_{n-1})\cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_n}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)$$

$$=E_Q\left(E_Q\left((F_n-F_{n-1})\cdot e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right)e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)$$

$$=0$$

を用いた。これより，

$$E_Q\left((F_{n-1}-y)\cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}X_1(v)dv}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)=0$$

を満たす y が F_{n-2} と等しくならなければ裁定機会が生じてしまう。すなわち，

$$F_{n-2} = \frac{E_{\mathrm{Q}}\left(F_{n-1} \cdot e^{-\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-2}}\right)}{P\left(t_{n-2}, t_{n-1}\right)} \tag{11}$$

を得る。

STEP 3 ：t_{n-3} 時点

y を正の数とする。t_{n-3} 時点において，「t_{n-2} 時点に $F_{n-2}-y$，t_{n-1} 時点に $F_{n-1}-F_{n-2}$，t_n 時点に F_n-F_{n-1}」というキャッシュフローをもたらす派生証券を考える。このキャッシュフローを表にすると以下の通りである。

時点	キャッシュフロー
t_{n-2}	$F_{n-2}-y$
t_{n-1}	$F_{n-1}-F_{n-2}$
t_n	$F_n-F_{n-1}=X_2(T)-F_{n-1}$

第 3 節より，この派生証券の t_{n-3} 時点における価格は

$$\begin{aligned}
&E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-2}-y\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-3}}\right) \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{1} E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-3}}\right) \\
&= E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-2}-y\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-3}}\right)
\end{aligned}$$

となる。上式において，各 $j=0, 1$ について，

$$E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-j-1}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-j-1}}\right) = 0$$

と

$$\begin{aligned}
&E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-3}}\right) \\
&= E_{\mathrm{Q}}\left(E_{\mathrm{Q}}\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right) \cdot e^{-\int_{t_{n-j-1}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-j-1}}\right) e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-j-1}} X_1(v)dv} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{n-3}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

を用いた。これより，

$$E_Q\left(\left(F_{n-2}-y\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-3}}\right)=0$$

を満たす y が F_{n-3} と等しくならなければ裁定機会が生じてしまう。すなわち，

$$F_{n-3}=\frac{E_Q\left(F_{n-2}\cdot e^{-\int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-3}}\right)}{P\left(t_{n-3},t_{n-2}\right)} \tag{12}$$

を得る。

⋮

STEPk：t_{n-k} 時点（$k=2, 3, ..., n$）

y を正の数とする。t_{n-k} 時点において，「t_{n-k+1} 時点に $F_{n-k+1}-y$，t_{n-k+2} 時点に $F_{n-k+2}-F_{n-k+1}$，...，t_{n-1} 時点に $F_{n-1}-F_{n-2}$，t_n 時点に F_n-F_{n-1}」というキャッシュフローをもたらす派生証券を考える。このキャッシュフローを表にすると以下の通りである。

時点	キャッシュフロー
t_{n-k+1}	$F_{n-k+1}-y$
t_{n-k+2}	$F_{n-k+2}-F_{n-k+1}$
⋮	⋮
t_{n-1}	$F_{n-1}-F_{n-2}$
t_n	$F_n-F_{n-1}=X_2(T)-F_{n-1}$

第3節より，この派生証券の t_{n-k} 時点における価格は

$$\begin{aligned}&E_Q\left(\left(F_{n-k+1}-y\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)\\&\qquad+\sum_{j=0}^{k-2}E_Q\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-j}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)\\&=E_Q\left(\left(F_{n-k+1}-y\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)\end{aligned}$$

となる。上式において，各 $j=0, 1, 2, ..., k-2$ について，

$$E_Q\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-j-1}}^{t_{n-j}}X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-j-1}}\right)=0$$

と

$$E_Q\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)$$

$$=E_Q\left(E_Q\left(\left(F_{n-j}-F_{n-j-1}\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-j-1}}^{t_{n-j}} X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-j-1}}\right)e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-j-1}} X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)$$

$$=0$$

を用いた。これより，

$$E_Q\left(\left(F_{n-k+1}-y\right)\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)=0$$

を満たす y が F_{n-k} と等しくならなければ裁定機会が生じてしまう。すなわち，

$$F_{n-k}=\frac{E_Q\left(F_{n-k+1}\cdot e^{-\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} X_1(v)dv}\middle|\mathcal{F}_{t_{n-k}}\right)}{P\left(t_{n-k},t_{n-k+1}\right)} \tag{13}$$

を得る。

以上により，

$$F_0=\frac{E_Q\left(F_1\cdot e^{-\int_0^{t_1} X_1(v)dv}\right)}{P\left(t_0,t_1\right)} \tag{14}$$

が「0時点における，満期を T 時点とする株式先物価格」を表している。

そして，(14)の右辺を計算すると，

$$F_0=\frac{X_2(0)}{P(0,T)}e^{G(0)} \tag{15}$$

である。ただし，各 $k=0, 1, 2, ..., n-2$ について，

$$G(k)=\frac{c^2}{4a}\left\{\sum_{j=k+1}^{n}B\left(t_{j-1},t_j\right)^2-B\left(t_k,t_n\right)^2\right\}+\frac{c^2}{2a^2}\left\{\sum_{j=k+1}^{n}B\left(t_{j-1},t_j\right)-B\left(t_k,t_n\right)\right\}$$
$$+\frac{c^2}{4a}\left\{\sum_{j=k+1}^{n-1}B\left(t_j,t_n\right)^2\left(1-e^{-2a\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)\right\}+\rho\sigma c\left\{\sum_{j=k+1}^{n-1}B\left(t_{j-1},t_j\right)B\left(t_j,t_n\right)\right\}$$

である。

ここで，(10)と(15)を比較すれば，$e^{G(0)}$が先渡価格と先物価格の差異であることが分かる。そして，瞬間的スポットレートの変動と株価変動の間の相関が強くなれば，先渡価格と先物価格の差異が大きくなることも(15)から分かる。

さらに，$h\to 0$ とすれば，

$$G(0) \to \left(\frac{c^2}{a^2} + \rho\sigma c\right)(T - B(0,\ T)) + \frac{2}{a}\left(\frac{c}{2}B(0,\ T)\right)^2$$

となるので，F_0 は

$$\frac{X_2(0)}{P(0,T)}e^{\left(\frac{c^2}{a^2}+\rho\sigma c\right)(T-B(0,T))+\frac{2}{a}\left(\frac{c}{2}B(0,T)\right)^2} \qquad (16)$$

に収束する。なお，Miura and Kishino（1995）の枠組みを用いて得られる「値洗いが連続的に行われる場合の株式先物価格式」と(16)は一致することを注意しておく。

5 まとめ

本研究では，Rabinovitch（1989）の枠組みを用いて，値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物価格式を導出した。瞬間的スポットレートを一定とするときと比較して，より現実に近い先物価格計測の一手段を本研究から得られたことになる。これは市場リスク計測の精度向上にも有用である。今後は，この研究成果を基に，「値洗いが離散時間で行われる場合の株式先物オプション価格式」を導出したい。

参考文献

1） Baxter M., and Rennie, A., *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.

2） Black, F., and Scholes, M., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, Vol.81, pp.637–654, 1973.

3） Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and Ross, S. A., “The Relation between Forward Prices and Futures Prices”, Journal of Financial Economics, Vol.9, pp.321–346, 1981.

4） Conze, A., and Viswanathan, “Path Dependent Options: The Case of Lookback Options”, Journal of Finance, Vol.46, pp.1893–1907, 1991.

5） Fujita, T., and Miura, R., “Edokko Options: A New Framework of Barrier Options”, Asia– Pacific Financial Markets, Vol.9, pp.141–151, 2003.

6） Geske, R., “The Valuation of Compound Options”, Journal of Financial Economics, Vol.7, pp.63–81, 1979.

7） Harrison, J. M., and Pliska, S. R., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, Stochastic Processes and their Applications, Vol.11, pp.215–260, 1981.

8） Heynen, R. C., and Kat, H. M., “Partial Barrier Options”, Journal of Financial Engineering, Vol.3, pp.253–274, 1994.

9） Hull J., *Options, Futures and Other Derivatives 6th edition*, Prentice Hall, 2005.

10） Jarrow, R. A., Lando, D., and Turnbull, S. M., “A Markov Model for the Term Structure to Credit Risk”, The Review of Financial Studies, Vol.10, pp.481–523, 1997.

11） Jarrow, R. A., and Oldfield, G. S., “Forward Contracts and Futures Contracts”, Journal of Financial Economics, Vol.9, pp.373–382, 1981.

12） Jarrow, R. A., and Turnbull, S. M., “Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk”, Journal of Finance, Vol.50, pp.53–85, 1995.

13） Kemna, A. G. Z., and Vorst, A. C. F., “A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values”, Journal of Banking and Finance, Vol.14, pp.113–129, 1990.

14） Merton, R. C., “Theory of Rational Option Pricing”, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.4, pp.141–183, 1973.

15） Miura, R., “A Note on Lookback Option Based on Order Statistics”, Hitotsubashi Journal of Commerce and Management, Vol.27, pp.15–28, 1992.

16） Miura, R., and Kishino, H., “Pricing of Bonds and their Derivatives with Multi–factor Stochastic Interest Rates : A Note” in Maruyama, T., and Takahashi, W.(eds), *Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory*, Springer, 1995.

17） Rabinovitch, R., “Pricing Stock and Bond Options when the Default–Free Rate is Stochastic”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.24, pp.447–457, 1989.

18） Steele, J. M., *Stochastic Calculus and Fiancial Applications*, Springer, 2000.

19） 三浦良造，『モダンポートフォリオの基礎』，同文舘，1989.