最小費用ネットワーク構築ゲームにおける コアに属する配分について

梅　澤　正　史

概　要

本論文では，複数の消費者と複数のサービス供給地点がいる状況におけるネットワーク構築問題を考えている。最小費用で全消費者の要求を満たすような最適ネットワークを構築し，その構築費用を消費者間で配分する。このような問題を協力ゲーム理論のモデルで考えたものの1つとして，最小費用フォレストゲームがある。本論文では，このゲームのコアが非空となる十分条件の下で，コアに属する配分を具体的に求める方法を考えている。特にこの配分は，部分的にシャプレー値を導入したものであり，公平性を保持した配分となっている。

1　はじめに

近年，情報通信をはじめとするネットワーク上で生じる様々な状況に対して，多くの数理モデルが構築され研究されている。その中でも本論文では，ネットワークの共同構築とそれに要する費用に関する利用者の配分の問題について扱う。そのようなネットワーク上の費用配分問題は，Claus and Kleitman［2］によって最初に扱われている。ここでは複数の消費者が1つの供給地点でサービスを利用するモデルを考えている。その後，Bird［1］がこのモデルを協力ゲームとしてモデル化し，Granot and Huberman［6］と Megiddo［8］がそのゲームにおけるコアの存在を示している。一方，複数のサービス供給地点を考慮したモデルに関しては，Rosenthal［11］，Granot and Granot［5］，Kuipers［7］がある。

本論文では，Kuipers［7］で提案された最小費用フォレストゲーム（Minimum Cost Forest Game（MCF game））を扱う。このゲームの概要は以下のようなものである。サービス供給者と利用者はネットワーク上の頂点として表される。サービス供給者は複数いても構わないがそれぞれは異なるサービスを提供するものと仮定する。各々の利用者は予め自分が必要とするサービスの集

* 本研究は，文部科学省科学研究費補助金（若手研究(B)，課題番号：19710135）の助成を受けたものである。

合を持っており，直接的であろうと間接的であろうとそれらのサービスとネットワーク上で連結されていることを望む。どの頂点間に対してもそれらの頂点を結ぶコストが与えられており，実際に結ぶことになったリンクに対する費用の合計をネットワークの構築費用とする。全利用者の要求を満たすような最小費用のネットワークはどのようなものになるか。さらに，その費用をどのように負担し合えばよいか，ということを考えるのが MCF game である。協力ゲームにおける有名な解概念としてコア（Gillies［4］）がある。MCF game においてはコアは必ずしも存在するわけではない。Kuipers［7］は MCF game のコアが存在するための十分条件を与えているが，Umezawa and Nishino［15］は，それらを一般化した条件を与えている。本論文では，この条件下でコアに属する費用配分法について考え議論する。Umezawa［14］において，1つの配分法に関して議論しているが，ここではそれ以外の配分の吟味と，Umezawa［14］における配分との関係についても触れることにする。特に本論文では，シャプレー値の概念を部分的に導入した配分を考えている。またこの配分は，上記の十分条件下で，偏りの少ないという意味で公平な配分となっていることを確認することができる。さらに，その配分は多項式時間で求めることができることにも注意する。

本論文の構成は以下の通りである。第2節で MCF game のモデルを正確な記述と記法を与え，第3節で費用配分の方法を議論する。第4節でまとめと今後の課題について述べる。

2 モデル

2.1 記法

$N=\{1,\ldots,n\}$ を消費者の集合とし，$M=\{n+1,\ldots,n+m\}$ をサービス供給者の集合とする。消費者 $i\in N$ が必要とするサービスの集合を $M(i)\subseteq M$ とし，どの消費者も少なくとも1つのサービスを必要としているものとする。すなわち，各 $i\in N$ に対して $M(i)\neq\emptyset$ とする。各 $S\subseteq N$ に対して，$M(S)\equiv\cup_{i\in S}M(i)$ と表記する。頂点の集合を $N\cup M$ とする完全グラフを考えた時，d をその辺上の非負の重み関数とし，d_{ij} を頂点 i と頂点 j を直接結ぶためにかかる費用とする。d_{ij} は対称であるとする。すなわち，$d_{ij}=d_{ji}$ である。$\mathcal{P}_2(N\cup M)$ を次数が2である $(N\cup M)$ の全ての部分集合族とする。辺の集合 $E\subseteq\mathcal{P}_2(N\cup M)$ が与えられた時，グラフ $G_E=(N\cup M,\ E)$ を定義することができる。グラフ G_E が与えられた時，もし，任意の $i\in S\subseteq N$ と任意の $j\in M(i)$ に対して i から j へ行くパスが G_E 内に存在するならば，その G_E を *S–feasible* と言う。また，各消費者 $i\in S$ に対して，i は S と $M(S)$ 以外の頂点を使うことが許されているものとする。全リンクの費用が最小になるような *N–feasible* グラフを見つけ，そのネットワーク構築費用を全消費者間でどのように配分するかを考えるのがここで扱う問題である。もしグラフ G_E がサイクルを持つならば，*N–feasible* であるまま少なくとも1つの辺を取り除くことができる。それによってネットワーク構築費用を下げることが可能である。従って，最小費用のネットワークを探す際には，フォレスト（forest）のみを考えればよい。そのネットワークは，木（tree）である必要もないことに注意

しておく。

以上のような費用配分問題を協力ゲーム理論の枠組みで扱う。各結託 $S \subseteq N$ の特性関数 $C(S)$ を以下のように

$$C(S) \equiv \min \left\{ \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} \mid G_E : S\text{–feasible フォレスト} \right\}$$

と定義し，順序対（N, C）を最小費用フォレストゲーム（Minimum Cost Forest Game（MCF game））と呼ぶ。

次に，協力ゲーム理論でよく知られた解概念の１つであるコアを定義する。コアは，

$$\mathrm{Core}(C) \equiv \left\{ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i = C(N) \text{ かつ各 } S \subset N \text{ に対して } \sum_{i\in S} x_i \leq C(S) \right\}$$

として与えられる配分の集合である。MCF game においては，もしコアに属する配分が存在すれば，N–*feasible* なフォレストを構築する際にかかる費用の，１つの公平な配分を与える。

2.2 補助定理

まずはじめに議論のための準備をする。V を頂点集合，d を V 上の完全グラフの辺の重み関数とした時，その順序対（V, d）のことをネットワークと呼ぶことにする。

定義 2.1（V, d）をネットワークとし，Γ を V 上の最小費用全域木とする。各 $v, w \in V$ に対して，$d^{\Gamma}_{v,w}$ を Γ 内で頂点 v から頂点 w までの唯一のパスに沿った辺たちの重みの中で最大値とする。

最小費用全域木については Ford and Fulkerson[３]を参照。また，定義2.1で与えられる重み関数 d^{Γ} はただ１つに決まることがわかっている。さらに，ネットワーク（V，d）に対して，複数の最小費用全域木があった場合にどの最小費用全域木を想定したとしても，その選択に依存することなく重み関数が１つに定まることが示されている（詳しくは，Kuipers[７]を参照)。従って以下では，上付き添え字 Γ を取って，定義2.1で与えられる重み関数を $\overline{d}$ と書くことにする。また，それをネットワーク（V，d）から誘導される極小重み関数と呼び，ネットワーク（V，$\overline{d}$）を極小ネットワークと呼ぶ（極小ネットワークの詳細は，Kuipers[７]を参照)。

定義 2.2 もし，任意の $S, T \subseteq N$ に対して，

$$\mathrm{C}(\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) + \mathrm{C}(\mathrm{S} \cap \mathrm{T}) \leq \mathrm{C}(\mathrm{S}) + \mathrm{C}(\mathrm{T})$$

となるならば，MCF game（N, C）は劣モジュラーであると言う。

劣モジュラーであるゲームの詳細は Shapley[13]を参照。

補助定理 2.1（[7]）サービス供給者の集合を M とし，$(N, \overline{C})$ を極小ネットワーク $(N \cup M, \overline{d})$ 上で定義される *MCF game* とすると，そのゲームは劣モジュラーである。

劣モジュラーなゲームのコアは必ず存在する（Shapley[13]参照）ので，上記の補助定理は，極小ネットワーク上で定義される MCF game は非空なコアを持つことを意味することに注意する。

次に，Umezawa and Nishino [15] で提案された，ネットワーク上の同値関係の概念を説明する。消費者 $i, i' \in N$ に対して，もし $M(i) \cap M(i') \neq \emptyset$ であるならば，$i \approx i'$ と書くことにする。もし，消費者の列 $i_1, \ldots, i_k$ が存在して，各 $l = 1, \ldots, k-1$ に対して $i_l \approx i_{l+1}$ となっているならば，その拡張された関係を $i_1 \sim i_k$ によって表し，これによって同値関係を定義する。この時，各 $N_j (j = 1, \ldots, p)$ を同値関係を持つ消費者の集合とすると，N は常に同値類 $N_1, \ldots, N_p$ に分割される。また，それに応じて M もまた同値類 $M_1, \ldots, M_p$ に分割される。各 $j = 1, \ldots, p$ に対して，$V_j \equiv N_j \cup M_j$ と置き，各 V_j をネットワーク上の同値成分と呼ぶ。

各 $j = 1, \ldots, p$ に対して，ネットワーク (V_j, d) における最小費用全域木を考えることによって極小ネットワークを一意に与えることができ，それを $(V_j, \tilde{d})$ とする。各 $j = 1, \ldots, p$ に対して，ネットワーク $(V_j, \tilde{d})$ 上で定義され，消費者集合 N_j とサービス供給者集合 M_j を持つ MCF game を $(N_j, \tilde{C})$ とする。また，各 $j = 1, \ldots, p$ に対して，$S_j \equiv S \cap N_j$ と置く。いま，重み関数 $\hat{d}$ を以下のように定義する。

$$\hat{d}_{vw} = \begin{cases} \tilde{d}_{vw} & v, w \in V_j, j = 1, \ldots, p \\ d_{vw} & \text{上記以外の } v, w \in N \cup M \end{cases}$$

$(N, \hat{C})$ をネットワーク $(N \cup M, \hat{d})$ 上で定義される MCF game とする。また，各 $U \subseteq (N \cup M)$ に対して，$K(U)$ をネットワーク (U, d) の最小費用全域木のコストとする。この時，以下の命題が成り立つことが示されている。

補助定理 2.2（[15]）(N, C) を消費者集合 N とサービス供給者集合 M からなる，ネットワーク $(N \cup M, d)$ 上の MCF game とする。もし，

$$C(N) = \sum_{j=1}^{p} K(V_j), \tag{1}$$

が成り立つならば，任意の $S \subseteq N$ に対して，

$$\hat{C}(S) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{C}(S_j)$$

となる。

定理 2.1（[15]）(N, C) を消費者集合 N とサービス供給者集合 M からなる，ネットワーク（N

$\cup M, d$）上の MCF game とする。もし，

$$C(N)=\sum_{j=1}^{p}K(V_j),$$

が成り立つならば，その *MCF game*（N, C）は，非空なコアを持つ。

3 配 分

以後，MCF game の具体的な配分法を議論する。特に，定理2.1におけるコアの存在条件が成立するとした時の費用配分法を考える。

3.1 配 分 法

MCF game に対して，Umezawa[14]は以下のような配分を考えている。π をゲームにおけるプレイヤーのある１つの順序とし，$\pi(i)$をプレイヤー i の順序 π における順番とする。各 $k=0, 1,\ldots, n$ に対して，$S^{\pi,k}=\{l\in N \mid \pi(l)\leq k\}$ とする時，各 $i\in N$ に対して，

$$x_i^{\pi}=C(S^{\pi,\pi(i)})-C(S^{\pi,\pi(i)-1}) \tag{2}$$

というものである。さらに，これを同値類ごとのゲームに適用する。各 $j\in\{1,\ldots, p\}$ に対して，π^j をプレイヤーの集合 N_j におけるある１つの順序とする。各 $k=0, 1,\ldots, |N_j|$ に対して，$S^{\pi^j,k}=\{l\in N \mid \pi^j(l)\leq k\}$ とする時，各 $i\in N_j$ に対して，

$$x_i^{\pi^j}=\tilde{C}(S^{\pi^j,\pi^j(i)})-C(S^{\pi^j,\pi^j(i)-1}) \tag{3}$$

となる。$\mathrm{x}^j\equiv(x_i^{\pi^j})_{i\in N_j}$ とし，$\mathrm{x}\equiv(\mathrm{x}^1,\ldots, \mathrm{x}^p)$ とする時，この配分 x は MCF game（N, C）のコアに属することを Umezawa[14]は論じている。

この配分は，コアに属することは良いのであるが，順序 π^j によって規定されることに注意する。すなわち，各 $j\in\{1,\ldots, p\}$ に対して $|N_j|!$ 通りの配分が存在することを意味する。従って，ゲーム全体としては，$|N_1|!\times|N_2|!\times\cdots\times|N_j|!$ 通りの配分が存在する。その中でどの配分が好ましいのか，ということは議論の余地がある。特に，(3)で与えられる配分は，MCF game（$N_j, \tilde{C}$）におけるコアの端点であることがわかっているので，偏りがないとは言い切れない。プレイヤー間の公平性という観点から考えると，コアの中心に近い点のほうが望ましいように思われる。そこで，協力ゲーム理論で良く知られた解概念である，シャプレー値を考える。プレイヤーの集合を N，特性関数を C とするゲーム（N, C）において，シャプレー値 ϕ は，以下のように定義される（Shapley[12]）。各 $i\in N$ に対して，

$$\phi_i=\sum_{S:i\in S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{C(S)-C(S\setminus\{i\})\}. \tag{4}$$

ここで，$s=|S|$ である。

Shapley[13]は，もしプレイヤーの集合を N，特性関数を C とするゲーム（N, C）が劣モジュラーであるならば，コアは非空であり，(4)によって与えられる配分（シャプレー値）はコアに属することを示している。シャプレー値は，限界貢献度を考慮した解概念である。その意味で，比較的偏りの少ない配分と捉えることができる。

シャプレー値を MCF game（$N_j, \tilde{C}$）に適用すると，以下のようになる。各 $i \in N_j$ に対して，

$$\phi_i^j = \sum_{S_j : i \in S_j \subset N_j} \frac{(s_j - 1)!(n_j - s_j)!}{n_j\,!} \{\tilde{C}(S_j) - \tilde{C}(S_j \setminus \{i\})\}. \tag{5}$$

ここで，$n_j = |N_j|$，$s_j = |S_j|$ である。補助定理2.1より，各 $j = 1, \ldots, p$ に対して，ネットワーク（$V_j, \tilde{d}$）上で定義される MCF game（$N_j, \tilde{C}$）は，劣モジュラーである。従って，$\phi^j \equiv (\phi_i^j)_{i \in N_j}$ とすると，配分 ϕ^j は，MCF game（$N_j, \tilde{C}$）のコアに属する。Umezawa and Nishino [15] における定理2.1の証明において，MCF game（$N_j, \tilde{C}$）のコアに属する任意の配分はもとの MCF game（N, C）のコアに属する，ということを示している。従って，$\phi \equiv$（$\phi^1, \ldots, \phi^p$）とすると，ϕ は，MCF game（N, C）のコアに属する，という結論を得ることができる。

命題 3.1（N, C）を消費者集合 N とサービス供給者集合 M からなる，ネットワーク（$N \cup M, d$）上の MCF game とする。もし，(1)が成り立つならば，(5)によって与えられる配分は MCF game（N, C）のコアに属する。

3.2 性 質

ゲームが劣モジュラーである時，シャプレー値は特別な意味を持つ配分となる。実は，(3)で与えられた配分を使って以下のように書くことができる（岡田［10］参照）。

各 N_j（$j = 1, \ldots, p$）に対して，順序の全ての集合を Π_j とする。このとき，各 $i \in N_j$ に対して，

$$\phi_i^j = \frac{1}{|N_j|!} \sum_{\pi^j \in \Pi_j} x_i^{\pi^j} \tag{6}$$

となる。すなわち，シャプレー値 ϕ_i^j は，ゲームが劣モジュラーである時，MCF game（$N_j, \tilde{C}$）のコアの端点 $x_i^{\pi^j}$ の平均であることがわかる。このことからも，比較的偏りのないバランスの取れた配分であることが確認できる。

3.3 数 値 例

Umezawa［14］において考えた例を使って，シャプレー値による配分を求める。$N = \{1, 2, 3, 4\}$ を消費者の集合，$M = \{5, 6\}$ をサービス供給者の集合とする。また，$M(1) = \{5\}$，$M(2) = \{6\}$，$M(3) = \{5\}$，$M(4) = \{6\}$ である。各辺の重みは，図 1 に示された通りであり，図上に示されていない辺の重みは 6 であるものとする。

消費者の集合 N は，2 つの同値類 $N_1 = \{1, 3\}$，$N_2 = \{2, 4\}$ に分割される。同様に，サービス供給者の集合も，$M_1 = \{5\}$，$M_2 = \{6\}$ と分割される。極小ネットワーク（$V_1, \tilde{d}$）上で定義される重

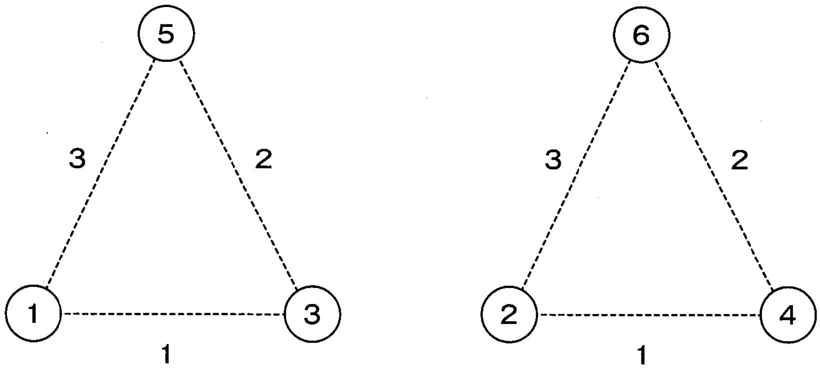

図 1：辺の重み

み関数 $\tilde{d}$ は，$\tilde{d}_{13}=1$，$\tilde{d}_{35}=2$，$\tilde{d}_{15}=2$ である。同様に，極小ネットワーク（$V_2, \tilde{d}$）上では，$\tilde{d}_{24}=1$，$\tilde{d}_{46}=2$，$\tilde{d}_{26}=2$ である。

(6)による配分法で計算する。各 N_j（$j=1, 2$）に対して，$\pi_k^j(k=1,\ldots, |N_j|!)$ をプレイヤーの順列とする。

$\pi_1^1=\{1, 3\}$：

$$x_1^{\pi_1^1} = \tilde{C}(S_1^{\pi_1^1,\pi_1^1(1)}) - \tilde{C}(S_1^{\pi_1^1,\pi_1^1(1)-1}) = \tilde{C}(\{1\}) = 2,$$

$$x_3^{\pi_1^1} = \tilde{C}(S_1^{\pi_1^1,\pi_1^1(3)}) - \tilde{C}(S_1^{\pi_1^1,\pi_1^1(3)-1}) = \tilde{C}(\{1,3\}) - \tilde{C}(\{1\}) = 3-2 = 1.$$

$\pi_2^1=\{3, 1\}$：

$$x_3^{\pi_2^1} = \tilde{C}(S_1^{\pi_2^1,\pi_2^1(3)}) - \tilde{C}(S_1^{\pi_2^1,\pi_2^1(3)-1}) = \tilde{C}(\{3\}) = 2,$$

$$x_1^{\pi_2^1} = \tilde{C}(S_1^{\pi_2^1,\pi_2^1(1)}) - \tilde{C}(S_1^{\pi_2^1,\pi_2^1(1)-1}) = \tilde{C}(\{1,3\}) - \tilde{C}(\{3\}) = 3-2 = 1.$$

以上より，

$$\phi_1^1 = \frac{x_1^{\pi_1^1}+x_1^{\pi_2^1}}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\phi_3^1 = \frac{x_3^{\pi_1^1}+x_3^{\pi_2^1}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

同様に，$\pi_1^2=\{2, 4\}$，$\pi_2^2=\{4, 2\}$ に対して，プレイヤー 2，4 の配分を求めると以下のようになる。

$$\phi_2^2 = \frac{x_2^{\pi_1^2}+x_2^{\pi_2^2}}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\phi_4^2 = \frac{x_4^{\pi_1^2}+x_4^{\pi_2^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

4 まとめと今後の課題

本論文では，最小費用フォレストゲームにおいてコアに含まれる配分を考えた。特に，協力ゲーム理論で知られているシャプレー値を部分的に適用し，コアの端点のような偏ったものにならない，公平性を考慮した配分法を与えた。シャプレー値自体は限界貢献度を考慮した配分である。本論文でシャプレー値を適用したのは，分割された部分ゲームの極小ネットワークという変形されたゲームに対してではあるものの，Umezawa［14］で与えられた配分法のような端点解を避けることができるということは意味がある。Umezawa［14］においては，順列の選び方に依存して配分が決まったが，本論文の配分法ではそのような曖昧さはない。また，本論文では，数値例によって具体的な配分を確かめた。この配分法は，求める手間に関しては多項式時間で可能であることに注意する。今後は，コア存在のための十分条件の拡張とその際の公平性を持つ費用の配分法を考えることが課題である。

参考文献

[1] C. G. Bird: On cost allocation for spanning tree: A game theoretic approach. *Networks*, 6 (1976), 335–350.

[2] A. Claus and D. J. Kleitman: Cost allocation for a spanning tree. *Networks*, 3 (1973), 289–304.

[3] L. R. Ford and D. R. Fulkerson: *Flows in Networks*: (Princeton University Press, Princeton, 1962).

[4] D. B. Gillies: *Some Theorems on n–Person Games*: (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953).

[5] D. Granot and F. Granot: On the computational complexity of a cost allocation approach to a fixed cost spanning forest problem. *Mathematics of Operations Research*, 17 (1993), 765–780.

[6] D. Granot and G. Huberman: Minimum cost spanning tree games. *Mathematical Programming*, 21 (1981), 1–18.

[7] J. Kuipers: Minimum cost forest games. *International Journal of Game Theory*, 13 (1997), 367–377.

[8] N. Megiddo: Cost allocation for steiner trees. *Networks*, 8 (1978), 1–6.

[9] G. Owen: *Game Theory, Third Edition:* (Academic Press, San Diego, California, 1995).

[10] 岡田章『ゲーム理論』有斐閣, 1996.

[11] E. C. Rosenthal: The minimum cost spanning forest game. *Economics Letters*, 23 (1987), 355–357.

[12] L. S. Shapley: A value for n–person games. In Kuhn and Tucker (eds.): *Contributions to the Theory of Games*, vol.2, (1953), 305–317.

[13] L. S. Shapley: Core of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1 (1971), 11–26.

[14] M. Umezawa: A method for fnding core allocations of minimum cost forest games. 『経営論集』大東文化大学経営学会，12（2006），119－125.

[15] M. Umezawa and H. Nishino: Sufficient Conditions for Nonempty Core of Minimum Cost Forest Games, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 46 (2003), no. 1, 35–43.