意見形成過程の２層閾値モデル

浦　田　健　二

Double-layered Threshold Models of Opinion Formation Process

Kenji Urata

集団における意見形成過程を２層の閾値モデルを用いて定式化する．意見表明する人たちの動向をもとにして，各個人は心の中で自分の意見を決定するだけではなく，その決定した自分の意見を他人に表明するかどうかも判断する．つまり各個人は２段階の異なる意思決定をしているわけで，このことを組み込むには通常の閾値モデルを２層化すればよい．一様な閾値分布をもつ２層モデルについての均衡点とその安定性を調べ，その結果を通常の閾値モデルと比較しながら意見形成過程について考察する．

１．集団における意見形成

人間社会には大小さまざまな集団があり，それぞれ集団としての意思決定を行っている．集団を構成しているのは，もちろん，一人の人間であるが，その一人一人の意思決定が集団全体としての方向性や問題に対する結論を打ち出すことになる．ところが，集団に属する個人はその意志決定を自分自身の個人的見解や判断のみで行うわけではなく，集団に属するメンバーの意向を，人によって差はあるにせよ，考慮していることが多い．個人は互いに直接・間接的に意見交換して相互作用し，集団全体としての方向性や結論が決まっていく．人数的に小規模なレベル（委員会，企業，学校など）から，大規模なレベル（国民全体の世論など）に至るまで，話し合いや他人からの情報をもとにして決定していくプロセスを経る限り，人間同士の相互作用は無視できないし，この相互作用によって集団内における意見形成がなされていく．このような集団的意見形成過程の具体的な例として，世論の形成，新しい技術や製品の採用不採用に関する普及現象，暴動の発生過程，などをあげることができる．

意見形成の過程を定量的，時間発展的に分析する数理モデルは，現在大きく分けて二種類ある．一つは，集団内の個人がランダムに相互作用することで個人の意見が変わっていき集団内意見が形成される，という基本的な考え方にに基づいて，確率過程モデルを作る方法[3,6]である．自然科学の統計物理分野で発展してきた手法を応用する．たとえば，気体のマクロな性質（圧力や温度

など）は気体中の多数の原子や分子の衝突現象として理解されるが，この時の原子分子が個人，衝突現象が個人同士の相互作用，気体が社会集団，マクロな性質（圧力，温度など）が集団の意思（世論，賛成や反対の割合など）に対応する，と考えるのである．最近さまざまな社会現象にもこの手法が適用されており，「Sociodynamics」と呼ばれている．一方，全く異なる見地から分析する手法として，Granovetter の閾値モデル[1]と呼ばれるものがある．集団に属する個人は，ある意見に賛成する人たちの集団内比率 p を知ることができるとし，その比率が自分の持っている閾値より大きければ自分も賛成するという同調行動をとる，というものである．意見形成の時間発展を決定論的方程式に基づいてモデル化することができる．2つの手法を比べてみると，「Sociodynamics」の手法は仮定として自明なものが多い半面，個人の属性や相互作用が，互いに区別のできない原子分子の衝突現象のように扱われるため，閾値モデルに比べて個性の扱いが充分に考慮されていない．閾値モデルは閾値分布の決定に問題がある．実地調査をするか，天下り的に仮定することになる．互いに一長一短あるが，数学的には「Sociodynamics」は確率微分方程式，閾値モデルは差分方程式で記述されるため，圧倒的に閾値モデルの方が扱いやすい．本論では閾値モデルを扱う．

閾値モデルは，情報機器の普及現象や世論形成過程[2]にすでに応用されており，検証可能な理論化しうるモデルとして期待されている．また，集団内の採用率が個人のもつ閾値以上になったら採用する，というだけでなく，逆に採用率が閾値以下になったら採用をやめる，というように，上限と下限の２つの閾値を用いて流行現象を理論化するために改良した例[4]もある．どんなモデルにもさまざまな仮定はつきものだが，このモデルの最も大きな基本的な仮定は，個人の閾値分布についてである．アンケート実地調査等で，特定の事例ごとに決めることができるであろうが，理論モデルとしては普遍性がなくなってしまう．この点に関しては§２で，いわゆる個人の意思決定問題の立場（ゲーム理論的立場）から閾値モデルを組み立て，再検討する．このモデルを改良していけば，さまざまな社会の集団現象を説明しうる，優れた理論モデルを作りあげることができるかもしれない．

石井[2]は閾値モデルを用いて，「沈黙の螺旋」[5]仮説を定式化した．沈黙の螺旋仮説のポイントは，集団内での自分の意見が多数派である場合には自分の意見をよく表明し，少数派である場合には沈黙する，ということであるが，石井は全集団をまず賛成集団と反対集団の二つに分け，それぞれの集団ごとに，自分の意見を表明する（あるいは沈黙する），という二者択一の選択肢があるとして閾値モデルを適用した．賛成集団と反対集団では異なる閾値分布を仮定し，また意見表明する（あるいは沈黙する）かどうかの判断は，賛成集団なら意見表明者中の賛成比率をもとになされる，とした（反対集団なら反対比率に基づいて判断される）．全集団に属する人間は賛成集団と反対集団に分けられ，所属は変化しないとしている．つまり賛成か反対かという個人の意見は既に決まっており，意見を表明するかどうかが周りの状況に依存する，としたのである．自分の意見が少数派なら表明しない，つまり沈黙する，多数派なら意見を表明する，という二つの選

択肢があるわけである．このような仮定で石井は，実現される均衡点を調べ，その値がカタストロフィックに，全集団に対する賛成者集団の比率に依存すること明らかにした．

各個人にとっては，賛成か反対かを決めることと，その決めた意見を表明するか，表明しないか，は全く別問題である．しかしその二つの問題ともに，周りの状況，つまり賛成を表明している人は意見を表明している人のうちでどのくらいの割合でいるか，という情報に基づいて判断されているはずである．もしそうなら集団内の意見形成，たとえば，ある議題に対して賛成か反対かは，次のようなプロセスで行われていると考えることができる．まず，何人かの意見表明があり，賛成か反対かを述べる．集団に属する人間は，賛成意見比率pを知ることができる．各個人は自分の閾値θ_1を超えていれば，賛成意見保持者になる（そうでない人は反対意見保持者である）．賛成意見保持者集団か反対意見保持者集団のどちらに属するか決まった個人は，さらにもう一つ別の閾値θ_2とpを比較して，意見表明するかどうかを決める．こうして次の時点での賛成意見表明者比率pが決まる．以上のようにして，集団内の意見が変化していく．賛成か反対か，発表か沈黙するか，という二つの問題に対し，それぞれ閾値モデルを適用することになる．ただし周囲の状況を判断する情報としては上に述べたpのみしか考えていない．一人の人間の中に賛成するか，表明するか，という二つの判断があるとして，２層の閾値モデルを本稿では§３で提案する．

§２で閾値モデルを個人の意思決定の見地から再検討し，§３で，２層閾値モデルについての定式化，§４で，閾値分布が一様な場合についての均衡点を調べ，結果について考察する．

2．個人の意思決定と閾値モデル

Ｎ人の集団において，ある一つの提案を採用すべきか否かの検討がなされているとする．個人は周りの状況を見ながら，この提案に賛成する（選択肢S_1）か，あるいは反対する（選択肢S_2）か，を意思表示する．この意思決定は，個人の価値観や好みなどの個人属性と，集団全体からうける雰囲気や圧力などに依存するものとしよう．集団における賛成比率がp（反対比率は$1-p$）のときに，個人がS_1あるいはS_2という選択をしたときの個人の利得をパラメーターα，βによって表したものが表１である．この表でαは，周りの状況を考えないとき，個人がどちらをどの程度好むかということを表すパラメーターである．集団内の賛成比率pに関係なく，$\alpha>0$なら賛成であり$\alpha<0$であれば反対する方を好んでいる．絶対値の大きさによって賛成あるいは反対の意思の強さを表している．利得の大きさが賛成，反対で０に対して対称になるよう設定してある．周りから独立してしまうことを避けたい，あるいは周りと協調することによる望ましさの程度を表すパラメーターがβで，βが大きいほど同調する願望が強い．その意味からβは０以下にはならない．パラメータα，βのとりえる値として，ここでは簡単のため$-1\leqq\alpha\leqq1$，$0<\beta\leqq1$，とする．

表1. 利得表

$-1 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 < \beta \leqq 1$

個性＼周囲	賛成 (p)	反対 ($1-p$)
賛成 S_1	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$
反対 S_2	$-\alpha-\beta$	$-\alpha+\beta$

個人がS_1，S_2の選択をしたときの期待利得 $u(S_1)$，$u(S_2)$ は，

$$u(S_1)=p\cdot(\alpha+\beta)+(1-p)\cdot(\alpha-\beta) \tag{2-1}$$

$$u(S_2)=p\cdot(-\alpha-\beta)+(1-p)\cdot(-\alpha+\beta) \tag{2-2}$$

したがって $u(S_1) \geqq u(S_2)$ なら賛成，逆なら反対という判断を着目している個人は下すことになる．この境目の比率は $\theta \equiv \frac{1}{2}\left[1-\frac{\alpha}{\beta}\right]$ となることがわかるので，パラメーター（α，β）を持つ個人は，集団の賛成比率 p が，

$p \geqq \theta$ なら賛成（S_1），$p < \theta$ で反対（S_2），

という意思決定を行うことになる．これはまさに閾値を θ としたときの「閾値モデル」である．個人の持つ閾値分布 θ は，意思決定の際の α，β の比の分布によって決定されることが分かる．

閾値 $\theta \leqq 0$（$\beta \leqq \alpha$）を満たす個人は，賛成（S_1）を支持する人が一人もいなくても自分は賛成する．賛成することへの信念（α）が，他の人と同調する喜びや孤立することによる恐れ（β）よりも大きい人を表している．この人たちを賛成派のハードコアと呼ぼう．逆に $\theta \geqq 1$（$\beta \leqq -\alpha$）をみたす個人は反対派のハードコアを形成する．閾値 $0 < \theta < 1$ を持つ人は集団全体の状況によって判断が変化するので，日和見主義者である．意見形成の過程を探る上で，この三つの集団があることを意識することは重要である（§ 4参照）．

今，$\alpha \sim \alpha+\Delta\alpha$，$\beta \sim \beta+\Delta\beta$ の値を持つ人が $\varphi(\alpha,\ \beta)\Delta\alpha\Delta\beta$ いるとしよう．もちろん全人数 $N=\int_{-1}^{1}d\alpha\int_{0}^{1}\varphi(\alpha,\ \beta)d\beta$ となる．時刻 t での賛成比率 $p(t)$ が与えられたとき，次の時点 $t+1$ で賛成する人は何人いるであろうか．（α，β）平面上で賛成者がいる領域 D_p は，$|\alpha| \leqq 1$，$0 < \beta \leqq 1$，$(1-2p)\beta \leqq \alpha$（$\because p \geqq \theta$）であるから，$p < \frac{1}{2}$ の時を図示すると図1のようになる．したがって，

$$p(t+1)=\frac{1}{N}\cdot\iint_{D_p}\varphi(\alpha,\beta)d\alpha\, d\beta \tag{2-3}$$

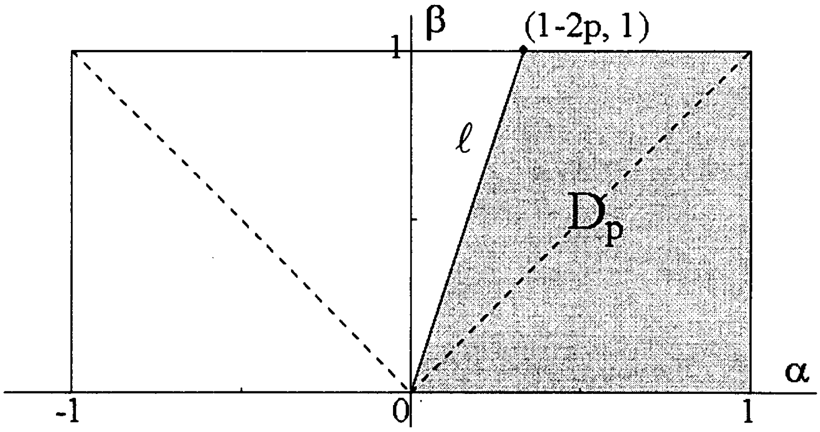


図1. 賛成派が存在する領域 D_p

ℓ ： $\beta = \frac{1}{1-2p}\alpha$

D_p の中には賛成派のハードコアも含まれている

また賛成者の全利得 $U(S_1)$，反対者の全利得 $U(S_2)$ は

$$U(S_1) = \iint_{D_p} u(S_1) \cdot \varphi(\alpha, \beta) d\alpha\, d\beta \qquad (2-4)$$

$$U(S_2) = \iint_{D_p^c} u(S_2) \cdot \varphi(\alpha, \beta) d\alpha\, d\beta \qquad (2-5)$$

となる．ここで D_p^c は，$|\alpha| \leqq 1$，$0 < \beta \leqq 1$ から D_p を除いた領域である．

パラメーター（α，β）が一様に分布している場合を考えてみよう．つまり $\varphi(\alpha, \beta) = C$（定数）とおく．この定数は集団の全人数 $N = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 \varphi(\alpha, \beta) d\beta$ であるから，$C = \frac{N}{2}$ となり，（2－3）式より

$$p(t+1) = \frac{1}{2}\left\{ p(t) + \frac{1}{2} \right\} \qquad (2-6)$$

上式の右辺を図2に示すとわかるように，いかなる初期値 $p(0)$ から出発しても $p = \frac{1}{2}$ に収束する（均衡点）．つまり，賛成50%，反対50%という集団意見が形成される．賛成及び反対のハードコアが，それぞれ25%ずつ存在することも分かる．

賛成者の全利得 $U(S_1)$ は，（2－4）に（2－1）を代入し $\varphi = \frac{N}{2}$ を用いれば簡単に計算できる．

$$U(S_1) = \frac{N}{2} \cdot \iint_{D_p} \{\alpha - (1-2p)\beta\} d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{N}{2} \cdot \int_0^1 d\beta \int_{(1-2p)\beta}^{1} \{\alpha - (1-2p)\beta\} d\alpha$$

$$= \frac{N}{12}(4p^2 + 4p + 1). \qquad (2-7)$$

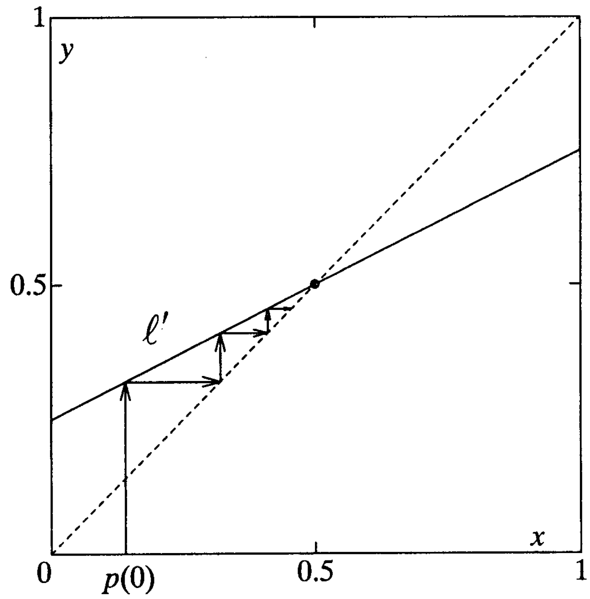


図2. 賛成比率 p の時間発展（矢印）

$\ell' : y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})$

$0 < p < 1$ で単調に増えることが分かる．同様にして，式（2−5）を用いれば

$$U(S_2) = \frac{N}{12}(4p^2 - 10p + 7), \quad (2\text{-}8)$$

となり，$0 < p < 1$ で単調に減少することが分かる．集合全体の利得 $U \equiv U(S_1) + U(S_2)$ は,

$$U = \frac{2}{3}N \cdot \left\{ (p - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right\}, \quad (2\text{-}9)$$

であって，全利得は均衡点で最低となっている．集団全体の利得を考えるなら，過渡的な時点のときの方が大きい．個人の意見が落ち着くまで待っていると，集団全体として利得は最低となってしまうことになる．また賛成者集団と反対者集団の全利得差 $\Delta U \equiv U(S_1) - U(S_2)$ は，式（2−7）と（2−8）より

$$\Delta U = N \cdot (p - \frac{1}{2}), \quad (2\text{-}10)$$

となり，均衡点の時に $U(S_1) = U(S_2)$ となっている．賛成者集団と反対者集団のそれぞれの総利得が等しくなるには，十分に時間をかけて均衡するまで待ったほうが良いことが分かる．

3．意見形成の２層閾値モデル

Ｎ人の集団があるとする．ある提案に対し賛成か反対か（棄権はないものとする），という２者択一の意見が集団内でどのように形成されていくかを２層の閾値モデルで定式化しよう．集団に属する各個人は，賛成か反対かの表明をした人の意見のみを知ることができる．他人の心の中をのぞき見ることはできないのであるから，黙っている人の意向を知ることはできない．ある時点

tでの集団全体の動向として知りえることは，意見表明した人のうちで賛成意見がどのくらいの割合であったか，ということのみである．この賛成意見表明者比率$p(t)$のみを個人は情報としてもちえるものとしよう．この$p(t)$ に基づいて，各人は2つの決定を行なう．まず，各人は自分のもつ閾値θと$p(t)$とを比較して賛成か反対かを決める．次に，その決めた意見を表明するかどうかをやはり同じように自分のもつ別の閾値θ'との比較で決める．ある提案に対して賛成か反対かを集団内で意見形成するプロセスには，自分の意見を心の中で決めるという段階と，その決めた意見を表明するかどうかいうことを決める段階があると考え，それぞれについて閾値モデルを適用する．

賛成か反対かを心の中で決める内面的意思決定に関しての閾値分布関数を$\rho(\theta)$とする（$0 \leqq \theta \leqq 1$，$0 \leqq \rho(\theta) \leqq 1$）．ここで$\rho(\theta)$ は，意見表明者中の賛成割合$p(t)$ が$\rho \geqq \theta$なら賛成するという人たちの，全人員N人に対する割合である．賛成表明者比率$p(t)$ が与られたとき，賛成と考えている者の人数n_1，反対と考えている者の人数n_2は，累積閾値関数$f(p) = \int_0^p \rho(\theta)d\theta$を用いてそれぞれ，

$$n_1 = N \cdot f(p), \tag{3-1}$$

$$n_2 = N \cdot (1 - f(p)), \tag{3-2}$$

と表される．賛成意見保持者のハードコアは$f(0)$ で，反対意見保持者のハードコアは$1 - f(0)$で表されている．

意見を表明するかどうかについて次に考えよう．集団全員はすでに上で述べたように賛成者集団（人数n_1人）反対者集団（人数n_2人）の二つに分けられている．それぞれの集団ごとに，意見表明するかどうかを閾値モデルを使って表そう．各個人が賛成か反対かという意見を持っているとしても，「沈黙の螺旋」仮説によれば，意見表明するかどうかは全く別問題である．賛成集団及び反対集団それぞれにおいて，「意見表明するかどうか」ということについての閾値分布を$\psi_1(\theta')$，$\psi_2(\theta'')$，累積閾値関数$g_1(p)$，$g_2(q)$ をとおく．ここで，$q = 1 - p$は反対意見表明者比率である．賛成者集団においては，賛成意見表明比率pと閾値θ'が$p \geqq \theta'$を満足するような閾値θ'を持つ人が意見表明するのであって，その人数は$n_1 \cdot \psi_1(\theta')$ 人となる．同様に反対者集団においては，反対意見表明比率qと閾値θ''が$q \geqq \theta''$を満足するような閾値θ''を持つ人が意見表明するのであって，その人数は$n_2 \cdot \psi_2(\theta'')$ 人となる．値pが指定されたとき，意見を表明する人数は，累積分布関数$g_1(p) = \int_0^p \psi_1(\theta')d\theta'$，$g_2(q) = \int_0^q \psi_2(\theta'')d\theta''$を用いて，

賛成者集団における意見表明者は$n_1 \cdot g_1(p)$,

反対者集団における意見表明者は$n_2 \cdot g_2(q)$,

となる．ここで$g_1(x)$，$g_2(x)$ はxに間して単調増加関数になっていることに注意されたい．賛成意見表明者が誰もいなくても（$p = 0$），賛成意見を表明するハードコアが$n_1 \cdot g_1(0)$人，意見表

明者が全員賛成を唱えても（$p=1$），かたくなに沈黙を守るハードコアが$n_1 \cdot g_1(1)$人いる．同様に反対意見表明者が誰も居ないとき（$p=1$）でも，反対意見を表明するハードコアが$n_2 \cdot g_2(0)$人，意見表明者が全員反対を唱えても（$p=0$）沈黙を守るハードコアが$n_2 \cdot g_2(1)$人いることになる．

時刻tでの賛成意見表明比率$p(t)$が与えられたとき，次の時点での$p(t+1)$は次の式で表すことができる．

$$p(t+1)=H(p(t)),$$
$$H(x)=\frac{f(x)\cdot g_1(x)}{f(x)\cdot g_1(x)+(1-f(x))\cdot g_2(1-x)}, \quad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{3-3}$$

関数f，g_1，g_2がすべて0以上1以下の値をとる単調増加関数であることから，$0 \leqq H(x) \leqq 1$，$H'(x)>0$となり，$H(x)$も0以上1以下の値をとる単調増加関数である．方程式$x^*=H(x^*)$を満足するx^*は均衡点である．この均衡点における微分係数が$|H'(x^*)|<1$を満たすなら均衡点は安定である．時間が十分たつと安定な均衡点のどれかに落ち着くことになる．どの均衡点に行くかは初期条件に依存する．逆に$|H'(x^*)|>1$ならば，この均衡点は不安定であり，いわゆる「臨界質量」になる．初期値がこの臨界質量よりもごくわずか大きいか小さいかで時間が十分たったときの意見形成は全く異なったものになってしまう．安定と不安定の境界は$H'(x^*)=1$となるときで，この均衡点は中立であるといわれる．初期値をこの均衡点の傍にとると，非常にゆっくりと時間変化する．

4．一様な分布の場合の結果と考察

式（3－3）は，賛成意見表明比率$p(t)$について力学系をなしている．閾値分布を最も単純な一様分布にして，この力学系の均衡点とその安定性を調べ，2層モデルにしたことでどのような点が変化するのかを調べていこう．

閾値分布p，ψ_1，ψ_2を定数としよう．累積分布関数f，g_1，g_2は一次関数となる．また，ハードコア$f(0)$，$1-f(0)$，$\{g_i(0),\ 1-g_i(0)\}$（$i=1,\ 2$）が必ず存在し，逆の意志をもつハードコアは，同じだけ存在すると仮定する．たとえば{賛成意見保持者のハードコアの割合$f(0)$} = {反対意見保持者のハードコアの割合$1-f(0)$}，などのようにする．すると，f，g_1，g_2は次のようにおける．

$$f(x)=(1-2a)x+a, \tag{4-1}$$
$$g_i(x)=(1-2b_i)x+b_i, \quad (i=1,2). \tag{4-2}$$
$$0 \leqq a, b_1, b_2 \leqq \frac{1}{2},\ b_1 \geqq b_2, \tag{4-3}$$

賛成，反対と考えているハードコアは同じ比率aだけ存在する．賛成と考えている集団のうちで常に意見表明することに決めている人の比率がb_1，常に沈黙する人の比率も同じ値b_1であるとし

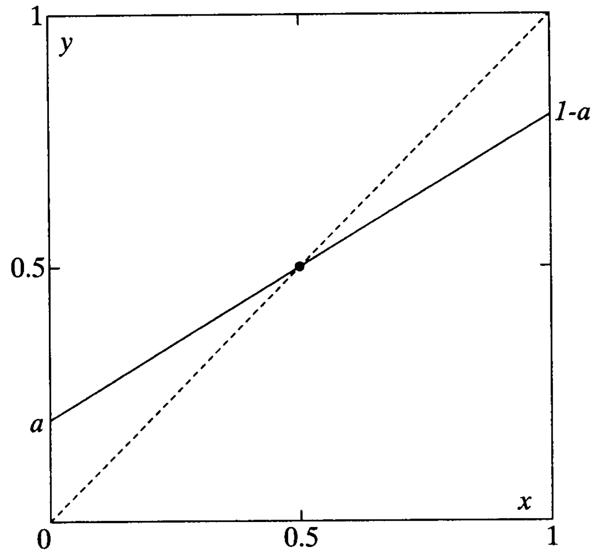


図3. 累積閾値関数$f(x)$

賛成意見表明比率がxのときに集団内の$f(x)$の割合の人が賛成する。

た．反対と考えている集団についても同様で，意見表明についての２つのハードコアはb_2で表される．意見表明に関する閾値は賛成と反対の立場を交換しても同じことであるから，$b_1 \geqq b_2$を考えれば十分である．

賛成か反対かを決める単層のモデルの場合（$f(x)$ のみを考えた場合）を考察しておこう．関数$f(x)$ のグラフ（図３参照）からわかるように，$\frac{1}{2}$が安定均衡点となる．つまり，単層のモデルではどのような状態から出発しても集団内の賛成・反対意見（を持っている人）の比率は十分に時間がたてば，それぞれ50%，50%になる．賛成のハードコアと反対のハードコアが同数だけいるために，日和見主義者の人たちは彼らに影響されて引きずられ，やはり半々ずつに分かれるわけである．その結果，全体が半々の意見に別れてしまうことになる．

では，意見を持つことと表明することが異なるとして考えたとき，どうなるであろうか．このときは２層の閾値モデル（３−３）に，（４−１）及び（４−２）を代入したものを調べればよい．計算の詳細は，Appendix を参照して頂きたい．以下に均衡点と安定性についの結果をまとめておこう．まず，場合わけに必要となるパラメータとして，

$$\xi \equiv \frac{(1-b_1-b_2)\{(2-b_1-b_2)-2\sqrt{b_1 b_2}\}}{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1(1-b_1-b_2)}, \qquad (4-4)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{2}(1-b_1-b_2), \qquad (4-5)$$

を定義する．ここで，

$$\eta \leqq \xi \quad (b_1 = b_2 \text{のとき} \xi = \eta), \qquad (4-6)$$

である．均衡点$\frac{1}{2}$（常に存在する）以外の均衡点が存在するかどうかということからξが，均衡点$\frac{1}{2}$の安定性からηが導出される．以下に結果を示す．安定を記号S，不安定をU，中立安定をNで括弧内に表してある．

（Ⅰ）$b_1 > b_2$のとき

（A）　$0 \leqq a < \eta$で3つの均衡点；$p_1(S) < \frac{1}{2}(U) < p_2(S)$，　臨界質量$\frac{1}{2}$．$p_2 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - p_1$，

（B）　$a = \eta$で2つの均衡点；$p_1 = \frac{1}{2}(N) < p_2(S)$，臨界質量存在しない，

（C）　$\eta \leqq a < \xi$で3つの均衡点；$\frac{1}{2}(S) < p_1(U) < p_2(S)$，　臨界質量$p_1$，

（D）　$a = \xi$で2つの均衡点；$\frac{1}{2}(S) < p_1 = p_2(N)$，　臨界質量存在しない，

（E）　$a > \xi$で1つの均衡点；$\frac{1}{2}(S)$，　臨界質量存在しない，

（Ⅱ）$b_1 = b_2$（$\xi = \eta$）

（A）　$0 \leqq a < \eta$で3つの均衡点；$p_1(S) < \frac{1}{2}(U) < p_2(S)$，　臨界質量$\frac{1}{2}$，$p_2 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - p_1$，

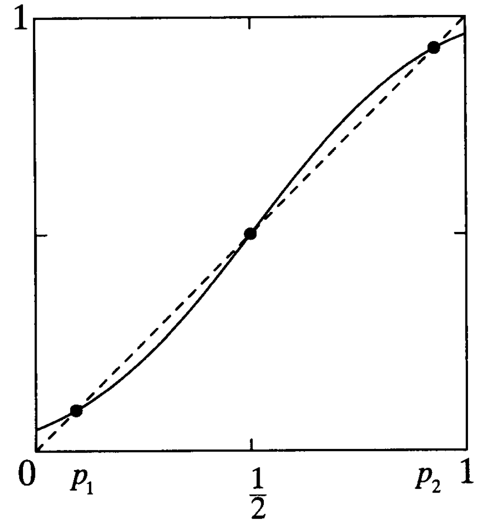
（B）　$a = \eta$（$= \xi$）で1つの均衡点；$\frac{1}{2}(N)$，臨界質量存在しない，

（C）　$a > \eta$（$= \xi$）で1つの均衡点；$\frac{1}{2}(S)$，臨界質量存在しない，

賛成あるいは反対の意志を持ったハードコアの比率aが十分に大きくて，ξよりも大きいときには（（Ⅰ）の（E），（Ⅱ）の（C）），意見表明するかどうかに関係なく，一層の閾値モデルと同じように均衡点である2分の1に落ち着く．逆にaを一定と考えたときには，ξが小さくなるのはb_1，b_2が大きくなるときであるから，意見表明するかどうかを日和見的に決めないハードコアが多いときにもこの状態が実現される．いずれにせよハードコアの比率が大きいと賛成50%反対50%の均衡状態に落ち着くことになる（図4-(c) を参照）．

一方aが十分小さいとき，あるいはb_1，b_2が十分に小さいとき（（Ⅰ）の（A），（Ⅱ）の（A）），均衡点である2分の1は不安定になり，二つの新しい均衡点p_1，p_2が発生する（図4-(a) を参照）．これは一層のモデルには存在しないもので，意見表明するかどうかを考慮に入れたことにより現れた新しい集団状態である．時刻0の初期賛成意見表明者比率$p(0)$を2分の1より大きく取れば$p_2(>\frac{1}{2})$，小さく取れば$p_1(<\frac{1}{2})$に収束する．50%が臨界質量たる所以である．初期値$p(0)$は任意に与えることができるのであるから，とにかく最初の時点で賛成意見を半数以上の人が表明しておれば，その時点での自分の考えがどうであれ日和見的に流されて集団全体は賛成多数の方へ導かれてしまう．もし初期値が2分の1より小さいならその逆になる．つまり最初にとにかく賛成と思うなら賛成と発表して優勢にしておけば，自分の意見の通りに集団全体を誘導することができるわけである．

中間の場合が（Ⅰ）の（C）の場合であり，2分の1より大きいところに二つの均衡点p_1，p_2が存在する（図4-(b) を参照）．この2つの均衡点p_1，p_2が2分の1よりも大きいところにあるのは$b_1 > b_2$としているからで，$b_1 < b_2$とするとこの二つの均衡点は2分の1より小さいところに現れる．すでに述べたように$b_1 > b_2$を考えれば十分であるから，この場合を考えてみよう．これ

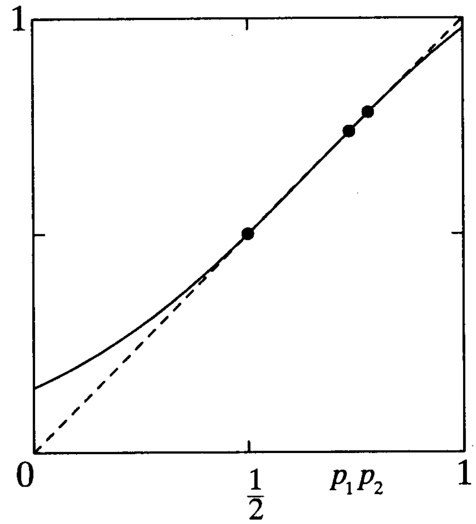


(a) (I) の (A)

$a = 0.18$, $b_1 = 0.2$, $b_2 = 0.15$.

$\xi = 0.32558\cdots$, $\eta = 0.325$.

$p_1 = 0.09321\cdots$, $p_2 = 0.92842\cdots$.

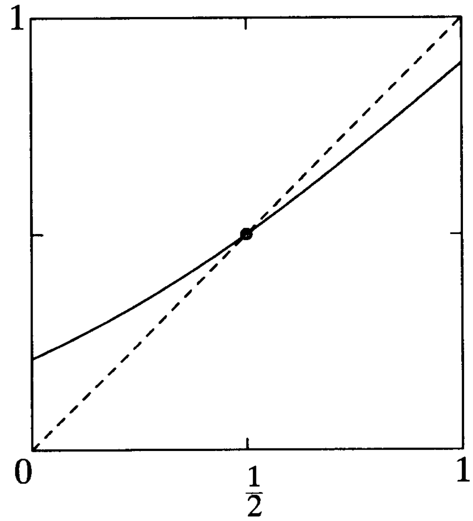


(b) (I) の (C)

$a = 0.36$, $b_1 = 0.3$, $b_2 = 0.03$.

$\xi = 0.36027\cdots$, $\eta = 0.335$.

$p_1 = 0.73710\cdots$, $p_2 = 0.78101\cdots$.



(c) (I) の (E)

$a = 0.45$, $b_1 = 0.3$, $b_2 = 0.1$.

$\xi = 0.30825\cdots$, $\eta = 0.3$.

図4. $H(x)$ のグラフ

は賛成意見表明者のハードコアの方が反対意見表明者のハードコアよりも大きい場合である．自分が賛成と決めたら，周りの状況によらず必ず表明する率が高いので，集団全体を賛成の方向へ誘導することができるわけである．最初に意見を表明しようとしまいと，悪くて２分の１であるから，賛成意見が有利であるといえる．ただ最終的に集団全体を賛成意見で圧倒するには，最初の時点で高い比率の賛成意見表明が必要である（つまり $p(0) > p_1 > \frac{1}{2}$ となっていなければならない）．

十分に時間が経って集団内の意見形成がすみ，２分の１よりも大きい均衡点 p_2 に落ち着いたとしよう（(Ⅰ）の（C)，(E)，(Ⅱ）の（A)）．この時，賛成意見をもつ人数は何人いるのであろうか．値 p_2 は意見表明をした人の中で何人が賛成意見だったかを示す割合であって，集団全体おける賛成意見保持者の割合ではないことに注意しよう．集団内の賛成意見保持者人数は $N \cdot f(p)$ で表される．関数 $f(p)$ は $p > \frac{1}{2}$ において $f(p) < p$ であるから，均衡点 p_2 のときには，集団内において賛成と考えている人の比率 $f(p_2)$ は，均衡点比率 p_2 よりも小さい．つまり，意見表明している人の賛成比率よりも実際に集団内で賛成と思っている人の割合は小さいのである．表明している結果が集団の実態（考えていること）を反映してはいない，ということは教訓的である．逆に２分の１より小さい均衡点の場合には，賛成者表明が少ないからといっても，実際に賛成と思っている人々の集団内比率はそれよりも大きい（もちろん50%を超えることはないのだが)．

ハードコアが存在しない特別な場合（a，b_1，b_2 のどれかが０になる場合）を考察しよう．まず，意見表明する（あるいは沈黙する）ハードコアが賛成集団と反対集団共にいない場合（$b_1 = b_2 = 0$），安定均衡点として０と1，不安定均衡点として２分の１が存在する．それらの値の大きさと安定性は，$0 \leq a < \frac{1}{2}$ の範囲では全く a には依存しない．そこでさらに a が限りなく２分の１に近い値をとるとしてみよう．このとき賛成か反対のどちらの意見をもつかということに関しては，賛成および反対のハードコアはそれぞれ50%近くいることになるので，最初から集団内の意見はほぼ半々に分かれている．したがって，いくら意見表明することに関して日和見主義者しかいないとしても，２分の１の均衡点が安定になるように思われるが，そうはならない．初期値 $p(0)$ が２分の１よりわずかに大きいかどうかで，賛成100%か反対100%が実現してしまう．賛成，反対の意見をもつハードコアがそれぞれ半々の勢力でほとんどを占めていても，実現される意見表明は，例えば賛成意見表明であれば０%か100%になってしまうのである．その原因は，意見表明に関する累積閾値関数が直線 $y = x$ と重なっており，日和見が通常のものとは異なるからである．意見表明に関する決定のみを考えると，すべての点が均衡点であり，どれも中立安定となっている．つまり，意見表明比率はこの層のみを考えると時間的に変化しない．ところが，賛成・反対を決める層では，最初に表明者比率が２分の１よりも大きければ，次の時点で賛成比率は２分の１よりも大きくなる（賛成意見表明率は小さくなる)．このような連鎖で時間が十分にたつと０%か100%かという極端な状況が実現されてしまうと考えられる．

ハードコアが存在しない特別な場合として今度は $a = 0$ の場合を考えてみよう．このとき，２

つの安定な均衡点 $0 < p_1 < \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} < p_2 < \frac{1}{2}$ と不安定な均衡点 $\frac{1}{2}$ が存在する．安定性は b_1，b_2 の値に無関係に成立する．賛成反対の意思決定について，日和見主義者ばかりであっても，その意見を必ず表明しようとするハードコアが存在さえすれば（$b_1 \neq 0$，$b_2 \neq 0$），初期賛成表明者比率 $p(0)$ が50%を超えれば p_2 へ，それ以下なら p_1 が実現することになる．賛成か反対かの意思決定が日和見であっても，どちらかが多数派となるような意見形成が実現することは興味深い．当然なのかもしれないが，何を考えているのかではなく，何を発言したのかによって集団の意見が形成されることを典型的に示している．

Appendix

累積閾値関数 $f(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された，0以上1以下の値をとる単調増加関数である．今，

$$H(x) = \frac{f(x) \cdot g_1(x)}{f(x) \cdot g_1(x) + \{(1-f(x)) \cdot g_2(1-x)\}}, \tag{1}$$

を定め，力学系 $p(t+1) = H(p(t))$ の均衡点とその定性を調べよう．具体的には，

$$f(x) = (1-2a)x + a, \tag{2}$$

$$g_i(x) = (1-2b_i)x + b_i \quad (i=1,2), \tag{3}$$

として計算する．ただし，

$$0 \leqq a, b_1, b_2 \leqq \frac{1}{2}, \quad b_1 \geqq b_2, \tag{4}$$

と仮定する．仮定 $b_1 \geqq b_2$ の代わりに，$b_1 \leqq b_2$ としても以下の計算は同様にできる．

（Ⅰ）均衡点

均衡点とは，$x = H(x)$ を満たす $0 \leqq x \leqq 1$ の解である．式（2），（3）より $f(\frac{1}{2}) = g_1(\frac{1}{2}) = g_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ となるので，式（1）から $x = \frac{1}{2}$ が一つの均衡点であることは容易にわかる．$x = H(x)$ を因数分解して

$$(2x-1) \cdot [(1-2a)(1-b_1-b_2) \cdot x^2 + \{(2-3b_1-b_2)a - (1-b_1-b_2)\} \cdot x + ab_1] = 0 \tag{5}$$

上式左辺の $(2x-1)$ を除いた2次式を $h(x)$ とおく．2次方程式 $h(x) = 0$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における解が均衡点となる．解の存在条件と個数を初等的な方法で求めることができる．

(A)　$y=h(x)$ の軸 $x=x^*$

（4）式より $y=h(x)$ は下に凸の放物線である．また，

$$h(0)=ab_1\geqq 0,\ \ h(1)=ab_2\geqq 0, \tag{6}$$

であるから，放物線の軸 $x=x^*$ の位置が $0\leqq x\leqq 1$ にないと，$h(x)=0$ の解は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に存在しない．軸の x 座標は

$$x^*=\frac{(1-b_1-b_2)-(2-b_1-b_2)\cdot a}{2(1-2a)\cdot(1-b_1-b_2)}, \tag{7}$$

となるので，$0\leqq x^*\leqq 1$ を満たす条件は仮定（4）を用いると（特にここでは $b_1\geqq b_2$ を用いた），

$$a\leqq \gamma(b_1,b_2)\equiv\frac{1-b_1-3b_2}{2-b_1-3b_2}, \tag{8}$$

となる．上式を満たすとき，さらに $h(0)\geqq h(1)$（$\because b_1\geqq b_2$）より，軸の位置に関して，

$$\frac{1}{2}<x^*\leqq 1, \tag{9}$$

であることがわかる．

(B) 判別式について

2次方程式 $h(x)=0$ の判別式を $D(a;b_1,b_2)$ とおく．

$$\begin{aligned}D(a;b_1,b_2)=&\{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1(1-b_1-b_2)\}\cdot a^2\\&-2\{(1-b_1-b_2)(2-b_1-b_2)\}\cdot a+(1-b_1-b_2)^2.\end{aligned} \tag{10}$$

この式を a についての関数とみなして，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で，$D(a;b_1,b_2)\geqq 0$ となる条件を求めよう．式（4）により $y=D(a;b_1,b_2)$ は a に関して下に凸の放物線である．

①放物線の軸 $a=a^*$

式（10）より

$$a^*=\frac{(1-b_1-b_2)\cdot(2-b_1-b_2)}{\{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1(1-b_1-b_2)\}}, \tag{11}$$

であるが，式（4）の $0\leqq b_1,\ b_2<\frac{1}{2}$ を用いれば，

$$0<a^*<1, \tag{12}$$

であることがわかる．

②判別式$J(b_1,\ b_2)$

$D(a\,;b_1,\ b_2)=0$ の a に関する判別式 $J(b_1,\ b_2)$ は

$$J(b_1, b_2) = 4b_1b_2(1-b_1-b_2)^2 \geqq 0. \tag{13}$$

③端点の値

$$D(0;b_1,b_2)=(1-b_1-b_2)^2>0,\ D(\tfrac{1}{2};b_1,b_2)=\frac{1}{4}(b_1-b_2)^2 \geqq 0. \tag{14}$$

以上①～③より，$y=D(a\,;b_1,\ b_2)$グラフは図５のようになる．したがって，a に関する方程式$D(a\,;b_1,\ b_2)=0$ の解は $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ の範囲に２つ（重解も２つと数える）存在する．この２つの解を$\xi(b_1,\ b_2)$，$\chi(b_1,\ b_2)$ とおく（$\xi \leqq \chi \leqq \frac{1}{2}$）と，

$$D(a;b_1,b_2) \geqq 0 \text{となるのは，} a \leqq \xi(b_1,b_2) \text{あるいは} a \geqq \chi(b_1,b_2) \tag{15}$$

ということになる．ここで，ξ，χ は具体的には以下の形をしている．

$$\xi(b_1,\ b_2)=\frac{(1-b_1-b_2)\cdot\{(2-b_1-b_2)-2\sqrt{b_1\cdot b_2}\}}{\{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1\cdot(1-b_1-b_2)\}}, \tag{16}$$

$$\chi(b_1,\ b_2)=\frac{(1-b_1-b_2)\cdot\{(2-b_1-b_2)-2\sqrt{b_1\cdot b_2}\}}{\{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1\cdot(1-b_1-b_2)\}}. \tag{17}$$

(C) γ，ξ，χ の大小関係

式（10）で $a=\gamma(b_1,\ b_2)$ を代入してみると，式（８）の γ の定義より

$$D(\gamma\,;b_1,\ b_2)=-(b_1-b_2)\cdot\frac{4b_2(1-b_1-b_2)^2}{(2-3b_1-b_2)^2} \leqq 0, \tag{18}$$

ここで，式（４）の仮定 $b_1 \geqq b_2$ を用いた．したがって

$$\xi(b_1,b_2)<\gamma(b_1,b_2)<\chi(b_1,b_2)<\frac{1}{2} \tag{19}$$

となる（図５参照）．

(D) 均衡点の存在とその大小関係

式（５）からわかるように，パラメーター a，b_1，b_2がどんな値をもっても常に$\frac{1}{2}$は均衡点として存在する．方程式$h(x)=0$ の解が $0 \leqq x \leqq 1$ で存在するのは，式（８）と（15）より，$a \leqq \gamma(b1,\ b2)$ かつ $\{a \leqq \xi(b1,\ b2)$ あるいは $a \geqq \chi(b1,\ b2)\}$ であるが，式（19）より，結局

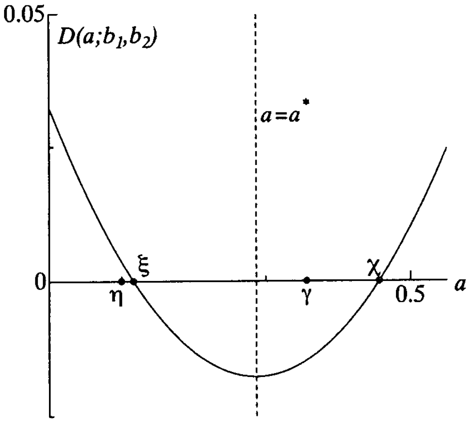


図5. $y=D(a\,;b_1,\ b_2)$ のグラフ
ξ と χ は $D(a\,;b_1,\ b_2)=0$ の解．
γ は $y=h(x)$ の軸が $0\leqq x\leqq 1$ にあるかどうかの境界値，
η は $h(x)=0$ の解が$\frac{1}{2}$より大きいかどうかの境界値．
$b_1=0.3$，$b_2=0.1$の場合を図示した。このとき，
$\eta=0.3$，$\xi=0.30825\cdots$，$\gamma=0.42857\cdots$，
$\chi=0.47862\cdots$，$a*=0.39344\cdots$．

$$a\leqq\xi\,(b_1,b_2), \tag{20}$$

であれば良いことがわかる．$a=\xi\,(b_1,\ b_2)$ のときには，方程式 $h(x)=0$ は重解となる．

常に存在する解$\frac{1}{2}$と式（20）の条件で存在する $h(x)=0$ の２解 x_1，x_2との大小関係はどうなっているのだろうか．下に凸の放物線 $y=h(x)$ において，軸の x 座標 x^*は式（９）をみたしており，また

$$h(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{4}\cdot\{2a-(1-b_1-b_2)\}, \tag{21}$$

であることを用いると，$h(\frac{1}{2})\geqq 0$ なら$\frac{1}{2}\leqq x_1\leqq x_2$，$h(\frac{1}{2})<0$ なら $x_1<\frac{1}{2}\leqq x_2$であることがわかる．そこで，

$$\eta\,(b_1,b_2)\equiv\frac{1}{2}\cdot(1-b_1-b_2), \tag{22}$$

とおけば，

$$a\geqq\eta\,(b_1,b_2)\ \text{なら}\ \frac{1}{2}\leqq x_1\leqq x_2, \tag{23}$$
$$a<\eta\,(b_1,b_2)\ \text{なら}\ x_1<\frac{1}{2}<x_2, \tag{24}$$

ということになる．
ところで，式（10）に $a=\eta\,(b_1,\ b_2)$ を代入してみると

$$D(\eta\,;b_1,b_2)\equiv\frac{1}{4}(b_1-b_2)^2(1-b_1-b_2)\geqq 0, \tag{25}$$

また，式（11），（12）と仮定（４）を用いれば，

$$\eta-a^*=\frac{(1-b_1-b_2)\cdot\{b_1^2-2(1+b_2)\cdot b_1+b_2\cdot(b_2-2)\}}{2\{(2-3b_1-b_2)^2+8b_1\cdot(1-b_1-b_2)\}}<0, \tag{26}$$

を示すことができる．従って図５を参照すると，

$$\eta\,(b_1, b_2) < \xi\,(b_1, b_2), \tag{27}$$

となっていることがわかる．

式（20），（23），（24），（27）により，均衡点の存在条件を求めることができる．

(Ⅱ) 均衡点の安定性

式（1）を微分し，$f(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$ がすべて0以上1以下の値をもつ単調増加関数であることを用いれば $H'(x)>0$ が示せるので，$H(x)$ も単調増加関数である．

(A) 均衡点$\frac{1}{2}$の安定性

式（1），（2），（3）より，

$$H'(\tfrac{1}{2}) = 2 - 2a - b_1 - b_2, \tag{28}$$

であり，この値の絶対値が1を超えると不安定，1より小なら安定，1なら中立安定となる．既に述べたように一般に $H'(x)>0$ であり，負になることはない．従って $H'(\frac{1}{2})$ が1より大きくなるかどうかで安定性はきまる．中立安定となる $H'(\frac{1}{2})=1$ のときの a の値は，式(21)の $\eta\,(b_1, b_2)$ になっている．つまり均衡点$\frac{1}{2}$の安定性と，それ以外の均衡点 x_1，x_2 が$\frac{1}{2}$より大きくなるかどうかということは，一体化していることに注意されたい．均衡点$\frac{1}{2}$の安定性は，

$$\begin{cases} a < \eta\,(b_1, b_2) \text{ のとき，} \frac{1}{2} \text{は不安定（U），} \\ a = \eta\,(b_1, b_2) \text{ のとき，} \frac{1}{2} \text{は中立安定（N），} \\ a > \eta\,(b_1, b_2) \text{ のとき，} \frac{1}{2} \text{は安定（S），} \end{cases} \tag{29}$$

(B) $h(x)=0$ の解 x_1，x_2 の安定性

直接 $H'(x_1)$, $H'(x_2)$ を計算しなくても，以下の①〜⑤のことに基づいて安定性は判断できる．

① $H(x)$ は連続な単調増加関数，

②端点の取りえる値の範囲，

$$0 \leqq H(0) = \frac{a \cdot b_1}{a \cdot b_1 + (1-a)\cdot(1-b_2)} < \frac{1}{2}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{2} \leqq H(1) = \frac{(1-a)\cdot(1-b_1)}{(1-a)\cdot(1-b_1) + a \cdot b_2} < 1. \tag{31}$$

③均衡点$\frac{1}{2}$の安定性，

④傾き1の直線 $y=x$ と曲線 $y=H(x)$ との交点が，均衡点$\frac{1}{2}$，x_1，x_2 になること，

⑤均衡点x_1，x_2と均衡点$\frac{1}{2}$の大小関係.

たとえば，$a<\eta$のときを考えてみよう．均衡点は3つあって$x_1(S)<\frac{1}{2}(U)<x_2(S)$である．均衡点$\frac{1}{2}$は不安定であるから，曲線$y=H(x)$は$x=\frac{1}{2}$において直線$y=x$の傾きよりも大きな勾配で交わらなければならない．そうなるような連続な単調増加関数で，$\frac{1}{2}$以外の他の2点$x_1(<\frac{1}{2})$，$x_2(>\frac{1}{2})$で直線$y=x$と交わり，2つの端点（0，H(0))，(1，H(1)）を通るには，$x=x_1$，x_2における傾きが直線$y=x$の傾きよりも小さくならなくてはならない．従って均衡点x_1，x_2は安定となる．他の場合も同様に考えることができる．

参考文献

1）Granovetter, M. "Threshold Models of Collective Behavior", American Journal of Sociology, 83（6）: 1420–1443, 1978.

2）石井健一，"世論形成の閾値モデル"，理論と方法，vol. 2，No. 1，15–28，1987.

3）Helbing, D. Quantitative Sociodynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995.

4）河根拓文，村重淳，合原一幸，"2次元しきい値分布を利用した流行現象の数理モデルとその解析"，電子情報通信学会論文誌 A vol. J83–A，No. 3，284–293，2000.

5）Noelle–Neumann, E. Spiral of Silence, the University of Chicago Press, 1984.

6）Weidlichi, W. Sociodynamics, Harwood Academic Publishers, 2000.

（2003年9月25日受理）